

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
Matematik Bölümü

Lineer Cebir I ARASINAV I			
Ders Kodu	: Mat 2103	Soyadı	: #CEVAP
Akademik Yıl	: 2010-2011	Adı	: #
Dönem	: Güz	Bölüm	: #
Tarih	: 30.11.2010	Öğrenci No	: ANAHTARI #
Saat	: 15:00	İmza	:
Süre	: 80 dakika	4 Soru 4 Sayfa Toplam 100 puan	
1	2	3	4

ÇÖZÜMLERDE TÜM ADIMLARI GÖSTERİNİZ.

Soru 1 (10+15 puan) (a) V bir vektör uzay ve U, V uzayının bir altuzayı olsun. $U + U = ?$

U, V uzayının bir alt uzayı

$$U + U = \{ u_1 + u_2 \mid u_1, u_2 \in U \}$$

$$\text{alt uzay} = \{ u \mid u \in U \} = U$$

(b) V bir vektör uzay ve U_1, U_2 ve U_3, V uzayının altuzayları olsun. $U_1 + U_2 = U_2 + U_1$ ve

$(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$ eşitlikleri doğru mudur?

$$U_1 + U_2 = U_2 + U_1$$

$$u_1 + u_2 \in U_1 + U_2 \iff u_1 + u_2 = u_2 + u_1 \quad (u_1 + u_2 \text{ de " + " değ. öz})$$

$$\iff u_1 + u_2 \in U_2 + U_1$$

$$\therefore U_1 + U_2 = U_2 + U_1$$

$$U_1 + (U_2 + U_3) = (U_1 + U_2) + U_3$$

$$u_1 + (u_2 + u_3) \in U_1 + (U_2 + U_3)$$

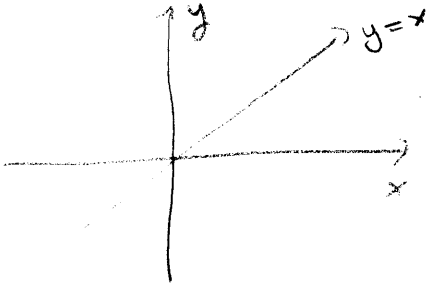
$$\iff u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3 \quad (u_1 + u_2 \text{ de " + " Br. Öz})$$

$$\iff u_1 + (u_2 + u_3) \in (U_1 + U_2) + U_3$$

$$\therefore U_1 + (U_2 + U_3) = (U_1 + U_2) + U_3$$

Soru 2 (25 puan) İspatlayınız veya ters örnek veriniz: V bir vektör uzay ve U_1, U_2 ve W, V vektör

uzayının, $V = U_1 \oplus W$ ve $V = U_2 \oplus W$ olacak şekilde altuzayları olsun. $U_1 = U_2$ mi dir?



$$V = \mathbb{R}^2$$

$$W = x\text{-ekseni}$$

$$U_1 = y\text{-ekseni}$$

$$U_2 = "y=x" \text{ doğrusu}$$

olalım

$$W = \{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$U_1 = \{ (0, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$$

$$W + U_1 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \} \\ = \mathbb{R}^2$$

$$U_1 \cap W = \{0\}$$

$$W = \{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$U_2 = \{ (y, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$$

$$W + U_2 = \{ (x+y, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \} \\ = \mathbb{R}^2$$

$$W \cap U_2 = \{0\}$$

Fakat $U_1 \neq U_2$ 'dir.

Soru 3 (25 puan) V bir vektör uzay ve (v_1, \dots, v_n) , V uzayında lineer bağımsız bir liste olsun.

$$(v_1 - v_2, v_2 - v_3, \dots, v_{n-1} - v_n, v_n)$$

listesi de V uzayında lineer bağımsızdır, ispatlayınız.

$$a_1(v_1 - v_2) + a_2(v_2 - v_3) + \dots + a_{n-1}(v_{n-1} - v_n) + a_n v_n = 0$$

iken $a_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ old görmeliyiz.

$$a_1 v_1 - a_1 v_2 + a_2 v_2 - a_3 v_3 + \dots + a_{n-1} v_{n-1} - a_{n-1} v_n + a_n v_n = 0$$

$$a_1 v_1 + (a_2 - a_1) v_2 + \dots + (a_n - a_{n-1}) v_n = 0$$

(v_1, \dots, v_n) l. bgsz.

$$\Rightarrow a_1 = 0$$

$$a_2 - a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

\vdots

$$a_n - a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$$

$\Rightarrow (v_1 - v_2, v_2 - v_3, \dots, v_{n-1} - v_n, v_n)$, V uzayında lineer bağımsızdır.

Soru 4 (25 puan) V ve W vektör uzaylar ve $T \in L(V, W)$ bir örten lineer dönüşüm olsun. (v_1, \dots, v_n) , V vektör uzayını üreten bir liste ise, $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ listesinde W vektör uzayını üretir, gösteriniz.

$$T \in \mathcal{L}(V, W) \text{ olsun}$$

$$T \text{ örten} \Rightarrow \text{range } T = W$$

(v_1, \dots, v_n) , V uzayını üretiyor ise,

$$\forall w \in W \text{ için } w = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \text{ o şekilde}$$

$a_i \in F$ vardır

İddia $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ W vektör uzayını üretir

$$\equiv \forall w \in W \text{ için,}$$

$$w = c_1 T(v_1) + \dots + c_n T(v_n)$$

o şekilde $c_1, \dots, c_n \in F$ bulmalıyız

$$w \in W \text{ alalım. } T \text{ örten} \Rightarrow \exists v \in V \text{ öyle ki } T(v) = w$$

(v_1, \dots, v_n) , V üretiyor

$$\Rightarrow T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = w$$

$$T \in \mathcal{L}(V, W)$$

$$\Rightarrow a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = w \text{ ve } a_i \in F$$

$c_i = a_i, \forall i = 1, \dots, n$ olarak düzenlenebilir

$\therefore (T(v_1), \dots, T(v_n))$, W vektör uzayını üretir