BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
Matematik Bölümü

	Lineer Cebir I ARASINAV I	

Ders Kodu : Mat 2103 Akademik Yıl : 2010-2011 Dönem : Güz Tarih : 30.11.2010 Saat : 13:00 Süre : 90 dakika	Soyadı : Adı : Bölüm : Öğrenci No : İmza : 4 Soru 4 Sayfa Toplam 100 puan

1	2	3	4		

ÇÖZÜMLERDE TÜM ADIMLARI GÖSTERİNİZ.

Soru 1 (10+15 puan) **(a)** $C[-1,1]$, $[-1,1]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı ve $S = \{f \in C[-1,1] \mid f(0) = 1\}$ olsun. S kümesi, $C[-1,1]$ uzayının bir altuzayı mıdır? Neden?

$0 \in S$? $\equiv$ $\forall x \in [-1,1]$ için $0(x) = 0$ old dan $\neq 1$

$\Rightarrow 0 \notin S$

$\Rightarrow S$, $C[-1,1]$ uzayının alt uzayı değil.

(b) F cisim ve $T = \{(x_1, x_2, x_3) \in F^3 \mid x_1x_2x_3 = 0\}$ kümesi verilsin. T, F^3 uzayının bir altuzayı mıdır? Neden?

(1) $0 \in T$?

$(0,0,0) \in F^3$ ve $0.0.0 = 0$ old dan $0 \in T$ ✓

(2) $\forall (x_1, x_2, x_3)$, $(y_1, y_2, y_3) \in T \Rightarrow (x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3) \in T$?

$x_1x_2x_3 = 0$ $\quad$ $y_1y_2y_3 = 0$ $\quad$ $= (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

$(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3) = (x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2)(x_3+y_3)$

$= \underbrace{x_1x_2x_3}_{0} + x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + x_1y_2y_3 + y_1x_2x_3 + y_1x_2y_3 + y_1y_2x_3 + \underbrace{y_1y_2y_3}_{0}$

$= 0$?

Örneğin: $(1,1,0)$, $(2,0,1) \in T$

$(1+2, 1+0, 0+1) = (3,1,1)$ ve $3\,1\,1 \neq 0$

$\notin T$

Soru 2 (25 puan) İspatlayınız veya ters örnek veriniz: V bir vektör uzay ve U_1, U_2 ve W, V vektör uzayının. $U_1 + W = U_2 + W$ olacak şekilde altuzayları olsun. $U_1 = U_2$ mi dir?

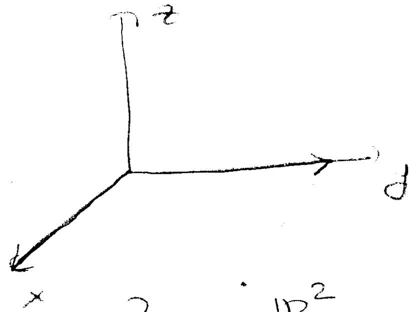
$V = \mathbb{R}^3$ $\quad W = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ ⇝ xy-düzlemi

$U_1 = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ⇝ x-ekseni

$U_2 = \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ ⇝ y-ekseni

W, U_1, U_2, $\mathbb{R}^3$'ün alt uzayları

$U_1 + W = U_2 + W$



$U_1 + W = \{(x,0,0) + (x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

$\parallel$

$U_2 + W$

fakat $\quad U_1 \neq U_2$

Soru 3 (25 puan) V bir vektör uzay ve $(v_1, \ldots, v_n)$. V uzayını üreten bir liste olsun.

$$(v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n)$$

listesi de V uzayını üretir, ispatlayınız.

$(v_1, \ldots, v_n)$, V uzayını üretiyor ise, $\forall v \in V$ için

$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = v$ o şekilde $a_i \in F$

vardır

iddia $(v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n)$, V'yi üretir

$\equiv \forall v \in V$ için $b_1(v_1 - v_2) + b_2(v_2 - v_3) + \ldots + b_{n-1}(v_{n-1} - v_n)$
$+ b_n v_n = v$

o şekilde $b_i \in F$ vardır

$$b_1(v_1 - v_2) + \ldots + b_2(v_2 - v_3) + \ldots + b_{n-1}(v_{n-1} - v_n) + b_n v_n =$$
$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$$

$$b_1 v_1 + (b_2 - b_1) v_2 + \ldots + (b_n - b_{n-1}) v_n = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$$

$b_1 = a_1$

$b_2 - b_1 = a_2 \Rightarrow b_2 = a_2 - b_1 = a_2 - a_1$

$b_3 - b_2 = a_3 \Rightarrow b_3 = a_3 - b_2 = a_3 - (a_2 - a_1) = a_3 - a_2 + a_1$

$b_4 - b_3 = a_4 \Rightarrow b_4 = a_4 - b_3 = a_4 - (a_3 - a_2 + a_1) = a_4 - a_3 + a_2 - a_1$

$b_{n-1} - b_{n-2} = a_{n-1}$

$b_n - b_{n-1} = a_n \Rightarrow b_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + (-1)^{n+1} a_1$

$a_i \in F$ old dan $b_i \in F$

$\Rightarrow (v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n)$ V'yi üretir

Soru 4 (25 puan) V ve W vektör uzaylar ve $T \in L(V, W)$ 1-1 bir lineer dönüşüm olsun. $(v_1, \ldots, v_n)$, V vektör uzayında lineer bağımsız bir liste ise, $(T(v_1), \ldots, T(v_n))$ listeside W vektör uzayında lineer bağımsızdır. gösteriniz.

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ ve T 1-1

$(T(v_1), \ldots, T(v_n))$ listesinin W vektör uzayında lineer bağımsız olması için

$a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n) = 0 \implies a_i = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n$ olmalı

$\parallel T \in \mathcal{L}(V, W)$

$T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = 0$

$\implies a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \in \text{null } T$

T 1-1

$\implies a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$

$(v_1, \ldots, v_n)$ l bğsz

$\implies a_1 = \cdots = a_n = 0$

$\therefore (T(v_1), \ldots, T(v_n))$, W vektör uzayında lineer bağımsızdır