EME 3105

SİSTEM SİMÜLASYONU

Simulasyonda İstatistiksel Modeller
Ders 5

Giriş

Önümüzdeki 2 hafta simulasyon girdilerinin modellenmesinde kullanılan kesikli ve sürekli dağılımlar hatırlatılacaktır.

Kesikli Dağılımlar

- •Bernoulli
- •Binom
- •Geometrik
- •Negatif Binom
- •Poisson
- •Düzgün (Kesikli)

Yaygın Kesikli Dağılımlar (1)

Dağılım, **X rassal Degişkeni**	**Olasılık Fonksiyonu** **f(x)**	**E[X] ve V[X]**
Bernoulli (p) Tek denemedeki basarı sayısı	$f(x) = p^x.(1-p)^{1-x}, \quad x = 0,1$	$\mu = E(X) = p$ $\sigma^2 = p.q = p.(1-p)$
Binom (n,p) n tane Bernoulli denemesindeki basari sayisi	$f(x) = \binom{n}{x}.p^x.q^{n-x}$, x=0,1,2,...,n	$\mu = E(X) = np$ $\sigma^2 = npq$
Geometrik (p) Sıralı bernoulli denemelerinde ilk basarıya kadarki deneme sayısı	$f(x) = q^{x-1}.p, \quad x = 1,2,...$	$E(X) = \frac{1}{p}$, $\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$
Negatif Binom (k,p) Sirali Bernoulli denemelerinde k'ninci basariya kadarki deneme sayisi	$f(x) = \binom{x-1}{k-1}.p^k.(1-p)^{x-k}$ x=k, k+1,...	$\mu = E(X) = k/p$ $\sigma^2 = kq/p^2$

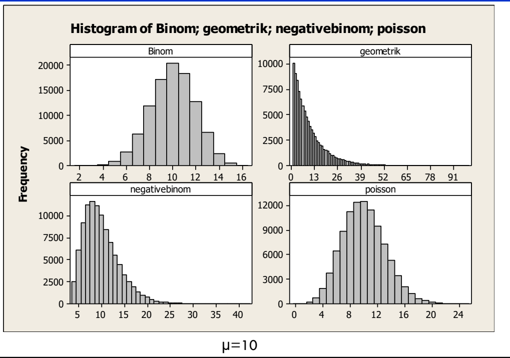
Yaygın Kesikli Dağılımlar (2)

5

Dağılım, X rassal Degişkeni	**Olasılık Fonksiyonu f(x)**	**E[X] ve V[X]**
Poisson (λ) Belli bir zaman süresince gerçekleşen olayların sayısı	$f(x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}, \quad x=0,1,2,... \quad \lambda>0$	$\mu=E(X)=\lambda$ $\sigma^2=\lambda$
Kesikli Düzgün (a,b)	$f(x)=\frac{1}{b-a}$ $x=a,a+1,...,b \; ; \; a \le b$	$\mu=E(X)=\frac{(b+a)}{2}$ $\sigma^2=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Kesikli Düzgün	$f(x)=\frac{1}{N}, \quad x=x_1,x_2,...,x_N$	$\mu=E(X)=\frac{N+1}{2}$ $\sigma^2=\frac{N^2-1}{12}$

Birim Talebin Modellenmesi (1)

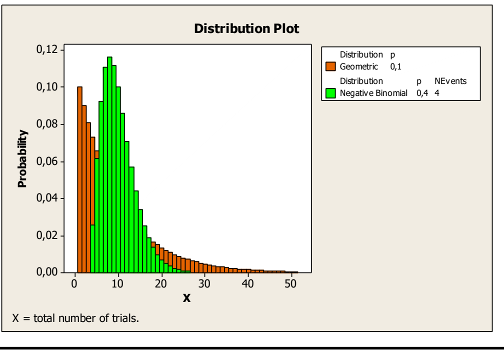
6



μ=10

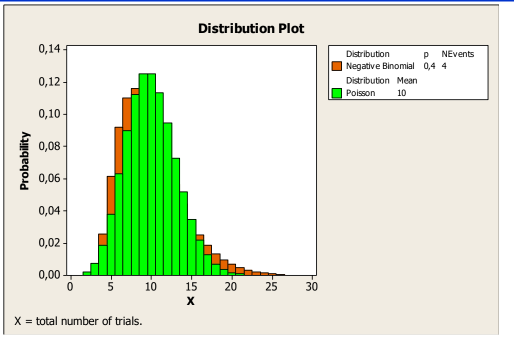
Birim Talebin Modellenmesi (2)

7



Birim Talebin Modellenmesi (3)

8

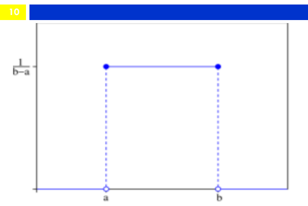


Sürekli Rassal Değişkenlerin Modellemesinde Kullanılan Dağılımlar

- Sürekli Düzgün **(Uniform)** Dağılım
- Normal Dağılım
- Üstel **(Exponential)** Dağılım
- Erlang Dağılımı
- Gamma Dağılımı
- Weibull Dağılımı
- Lognormal Dağılım
- Beta Dağılımı
- Üçgensel **(Triangular)** Dağılım

Sürekli Düzgün Dağılım

10



$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \le x \le b$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \qquad a<x<b$$

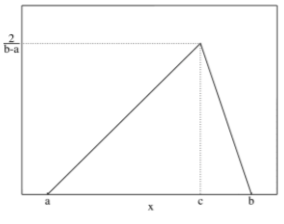
Parametreler: a=minimum değer; b=maximum değer

Simulasyon denemelerinin işletilip sonuçlar alınmasında, sürekli düzgün dağılım kullanılması simulasyon tekniğinin vazgeçilmez bir ögesidir.

Herhangi rastgele seçilmiş dağılımdan örnek alma işlemi uygulanmasında sürekli düzgün dağılım önemli bir rol oynar. Kullanılan bir genel yöntem ters dönüşümlü örnekleme yöntemidir

Üçgensel Dağılım

11



$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & a \le x \le c \\ 1 - \dfrac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} & c \le x \le b \end{cases}$$

Parametreler:
a= minimum değer: b= maksimum değer: c= mod

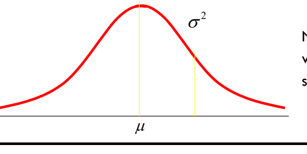
Üçgensel dağılım, tipik olarak sınırlı sayıda örneklem verisiyle bir ana kitlenin tanımlanmasında, özellikle de değişkenler arasındaki ilişkilerin bilindiği, ancak verinin yetersiz olduğu durumlarda kullanılır.

Üçgensel dağılım özellikle proje yönetiminde PERT analizinde bir minimum ve maksimum değer aralığı ile tanımlanan olayları modellemek için kullanılır.

Normal Dağılım

Tanım: Sürekli bir X rasgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi ise X normal dağılımı sahiptir denir.

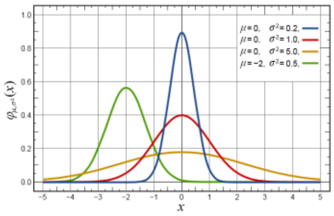
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ,-\infty<x<\infty,\ -\infty<\mu<\infty,\ \sigma^2>0$$



Normal dağılımı ortalaması: μ ve varyansı: σ^2 olan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ simgesiyle göstereceğiz.

Normal Dağılım

13



Parametreler:

μ : Ana Kitle Ortalaması

σ^2 : Ana Kitle Varyansı

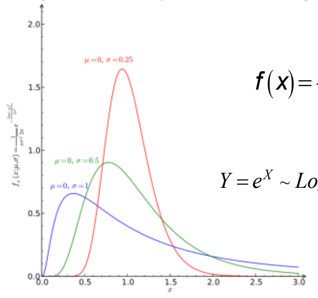
Birçok psikolojik ölçümler ve fiziksel olay, normal dağılım kullanılarak çok iyi yaklaşık olarak açıklanmaktadır.

Doğa ve davranış bilimleri içinde bulunan birçok olayın modellenmesinde normal dağılımın kullanılmasına neden, merkezsel limit teoreminin uygulanmasından doğmaktadır.

Lognormal Dağılım

14

Log-normal dağılım, logaritması normal dağılım gösteren herhangi bir rassal değişken için tek-kuyruklu bir olasılık dağılımdır.

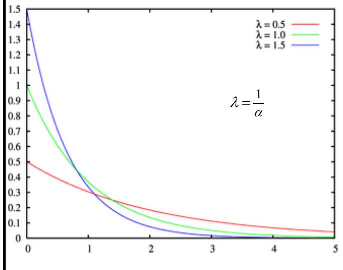


$$f(x)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x>0$$

$$Y=e^X \sim LogN(\mu,\sigma^2) \Leftrightarrow X \sim Norm(\mu,\sigma^2)$$

Üstel Dağılım

15



$\lambda = \frac{1}{\alpha}$

Tanım 1:

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}, \quad x\,\square\,0$$

Parametre:

λ = Birim zamandaki ortalama olay sayısı

Tanım 2:

$$f(x)=\frac{1}{\alpha}e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)x}, \quad x\geq 0$$

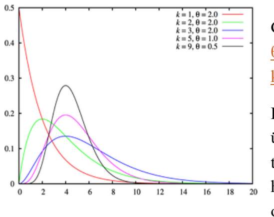
Parametre:

α = Olaylar arası ortalama süre

Sabit ortalama değişme hızında ortaya çıkan bağımsız olaylar arasındaki zaman aralığını modellerken, bir üstel dağılım doğal olarak ortaya çıkar.

Gamma Dağılımı

16



Gamma dağılımı iki parametreli bir dağılımdır.

θ: Ölçek parametresi

k: Şekil parametresi

Eğer k tam sayı ise, Gamma Dağılımı, k tane üstel dağılım gösteren rassal değişkenlerin toplamını temsil eder ve rassal değişkenlerin her birinin üstel dağılımı için parametre 1/θ olur.

$$f(x;k,\theta) = x^{k-1}\frac{e^{-x/\theta}}{\theta^k\,\Gamma(k)} \text{ for } x>0 \text{ and } k,\theta>0.$$

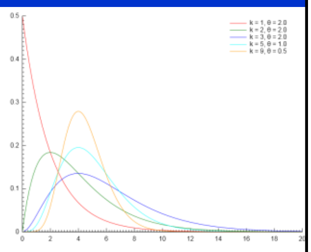
$\Gamma(k)=(k-1)!$ k pozitif tamsayı için

Erlang Dağılımı

17

Erlang dağılımı, Üstel ve Gamma dağılımları ile yakından ilişkili sürekli bir dağılımdır.

Eğer k pozitif tamsayı ise, Erlang dağılımıyla aynıdır.



$$f(x;k,\lambda)=\frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}\quad \text{for } x,\lambda\geq 0,$$

$$F(x;k,\lambda)=1-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{n!}e^{-\lambda x}(\lambda x)^n.$$

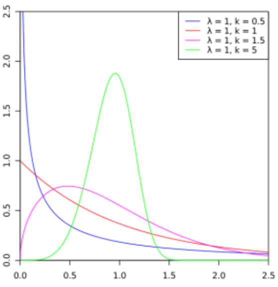
Weibull Dağılımı

18

$$f(x;k,\lambda)=\frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-(x/\lambda)^k}$$

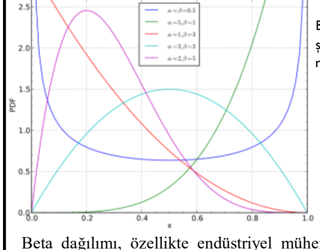
Mühendislikte üretim ve mal teslim zamanlarını temsil etmek için modellemelerde Weibull dağılımı kullanılmaktadır.

Bunun yanısıra bakım-arıza analizi için istatistiksel modellere temel olmaktadır.



Beta Dağılımı

19



Beta dağılımı [0,1] aralığında iki tane pozitif şekil parametresi (tipik olarak α ve β) ile normalize edilmiş bir sürekli olasılık dağılımıdır.

$$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$
$$=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

Beta dağılımı, özellikte endüstriyel mühendislik ve yöneylem araştırması bilim alanlarında, belirli bir minimum değer ile belirli bir maksimum değer aralığı içinde sınırlanmş olayların ortaya çıkması şeklindeki pratik sorunların modellenmesi için kullanılır. Özellikle CPM tipi proje idaresi ve kontrolu kuramında, beta dağılımı ve üçgensel dağılım ile birlikte özellikle olasılık gösteren aktivite uzunluklarının tahmini için kullanılmaktadır.

Sürekli Dağılımlar (1)

20

Dağılım	Birikimli Dağılım Fonksiyonu F(x)	E[X]	V[X]
Uniform (a,b)	$\frac{x-a}{b-a}$ a<x<b	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal (μ,σ^2)	Kapalı form yok	μ	σ^2
Üstel (λ)	$1-e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Erlang (λ, k)	$1-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{e^{-k\lambda x}(k\lambda x)^n}{n!}$	k/λ	k/λ^2
Gamma (β,α)	k pozitif tamsayı ise , Erlang k Değilse , Kapalı form yok	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$

Sürekli Dağılımlar (2)

21

Dağılım	Birikimli Dağılım Fonk. F(x)	E[X]	V[X]
Weibull (β,α)	$1-e^{-(x/\beta)^{\alpha}}$	$\frac{\beta}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$\frac{\beta^2}{\alpha}\left\{2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}\left(\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2\right\}$
Lognormal (μ_l,σ_l^2)	Kapalı form yok $\mu=\ln\left(\mu_l/\sqrt{\sigma_l^2+\mu_l^2}\right)$ $\sigma^2=\ln\left(\left(\sigma_l^2+\mu_l^2\right)/\mu_l^2\right)$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$
Beta (α_1,α_2)	Kapalı form yok	$\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$	$\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_1+\alpha_2+1)}$
Üçgensel a=minimum b= maksimum c= mode	$\begin{cases}\frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & a\le x\le c\\ 1-\frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} & c\le x\le b\end{cases}$	$\frac{a+b+c}{3}$	$\frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}$

Gelişlerarası Süre ve Servis Süresinin Modellenmesi (1)

22

Teorem: Olayların gerçekleşmesi ortalaması λ(olay/br.zaman) olan poisson sürecine uyuyorsa, olayların olusları arasında geçen süre ortalaması 1/λ (br.zaman/olay) olan Üstel dağılıma uyar.

Örnek: Müşteriler sisteme ortalaması 10 (müşteri/saat) olan Poisson Sürecine uygun olarak geliyorsa, müşteri gelişleri arasında geçen süre ortalaması 1/10 (saat/musteri) olan Üstel dağılıma uyar.

Gelişlerarası Süre ve Servis Süresinin Modellenmesi (2)

23

- Eğer süreler tamamen rassalsa, simulasyonda çoğu zaman Üstel dağılımla modellenir.
- Süreleri modellemek için Gamma ve Weibull dagilimlari da kullanilabilir (Üstel dağılım, bu iki dağılımın özel bir durumudur).

Gelişlerarası Süre ve Servis Süresinin Modellenmesi (3)

24

- Pratikte servis süreleri Üstel Dağılımın açıklayabildiginden daha uzunsa, servis süresinin modellenmesinde Weibull dağılımı daha uygun olabilir.
- Sürekli Rassal Değişkenleri modellemede Normal Dağılım kullanılırken negatif değerler alabildiği göz önünde bulundurulmalıdır.

Arızaya Kadarki Sürenin Modellenmesi (1)

25

Arıza zamanları Üstel, Gamma ve Weibull gibi bir cok dağılımla modellenebilir.

- Eğer arızalar tamamen rassal olarak oluyorsa, arızaya kadarki süre Üstel dağılımla modellenebilir.
- Gamma dağılımı, her parçanın arızaya kadarki sürelerinin üstel oldugu yedek parcaların bulundurulduğu durumda modellemede kullanılır.

Arızaya Kadarki Sürenin Modellenmesi (2)

26

Sistemde bir çok parça varsa ve arıza seri bağlı bir çok parcadaki hatalardan dolayı oluşuyorsa genellikle arızaya kadarki süreyi modellemek icin Weibull dağılımı uygundur.

Çoğu arıza aşınmadan kaynaklanıyorsa, normal dağılım modelleme için oldukça uygun olabilir.

Bazı parça tipleri için arızaya kadarki süreleri modellemek için Lognormal dağılım kullanılabilir.

Veri Seti Yetersiz yada Veri Yoksa

27

Düzgun Dağılım	Gelişlerarası yada servis süresinin rassal oldugu biliniyorsa, fakat dağılımıyla ilgili bilgi yoksa
Üçgensel Dağılım	Rassal degiskenin en küçük, en büyük ve en sık gerçekleşen değerleri hakkında varsayım yapılabılıyorsa

Ceşitli dağılım formlari sağladiği için veri yoksa Beta dağılıma da kullanılabilir.