# EME 3105

# Sistem Simülasyonu

**Simulasyonda İstatistiksel Modeller-II**
**Ders 5**

## Sürekli Rassal Değişkenlerin Modellemesinde Kullanılan Dağılımlar

- Sürekli Düzgün **(Uniform)** Dağılım
- Normal Dağılım
- Üstel **(Exponential)** Dağılım
- Erlang Dağılımı
- Gamma Dağılımı
- Weibull Dağılımı
- Lognormal Dağılım
- Beta Dağılımı
- Üçgen **(Triangular)** Dağılım

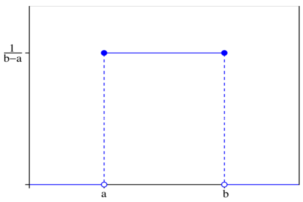
## Sürekli Dağılımlar (1)

| Dağılım | Birikimli Dağilim Fonksiyonu F(x) | E[X] | V[X] |
|---|---|---|---|
| **Uniform (a,b)** | $\frac{x-a}{b-a}$ a<x<b | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| **Normal (μ, $\sigma^2$)** | Kapalı form yok | $\mu$ | $\sigma^2$ |
| **Üstel ( $\lambda$ )** | $1-e^{-\lambda x}$ | $1/\lambda$ | $1/\lambda^2$ |
| **Erlang ( $\lambda$ , k)** | $1-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{e^{-k\lambda x}(k\lambda x)^n}{n!}$ | $k/\lambda$ | $k/\lambda^2$ |
| **Gamma ( $\beta$ , $\alpha$ )** | k pozitif tamsayı ise , Erlang k<br>Değilse , Kapalı form yok | $\alpha\beta$ | $\alpha\beta^2$ |

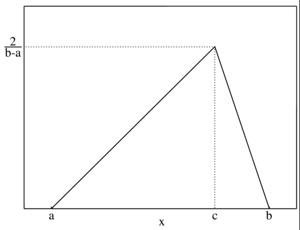
## Sürekli Dağılımlar (2)

| Dağılım | Birikimli Dağılım Fonk. F(x) | E[X] | V[X] |
|---|---|---|---|
| **Weibull ( $\beta$ , $\alpha$ )** | $1-e^{-(x/\beta)^\alpha}$ | $\frac{\beta}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ | $\frac{\beta^2}{\alpha}\left\{2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}\left(\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2\right\}$ |
| **Lognormal ($\mu_l$, $\sigma_l^2$)** | Kapalı form yok<br>$\mu=\ln\left(\mu_l/\sqrt{\sigma_l^2+\mu_l^2}\right)$<br>$\sigma^2=\ln\left(\left(\sigma_l^2+\mu_l^2\right)/\mu_l^2\right)$ | $e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ | $e^{2\mu+\sigma^2\left(e^{\sigma^2}-1\right)}$ |
| **Beta ( $\alpha_1$, $\alpha_2$)** | Kapalı form yok | $\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$ | $\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_1+\alpha_2+1)}$ |
| **Üçgensel**<br>a=minimum<br>b= maksimum<br>m= mode | $\begin{cases}\frac{(x-a)^2}{(b-a)(m-a)} & a \le x \le m \\ 1-\frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-m)} & m \le x \le b\end{cases}$ | $\frac{a+b+m}{3}$ | $\frac{a^2+b^2+m^2-ab-am-bm}{18}$ |

## Sürekli Düzgün Dağılım ve Üçgensel Dağılım

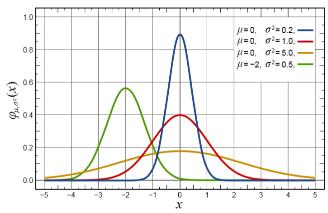



Sürekli Düzgün Dağılım

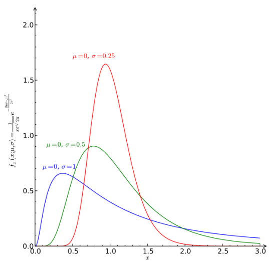



Üçgensel Dağılım

## Normal Dağılım ve Lognormal Dağılım

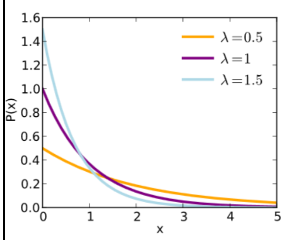


Normal Dağılım

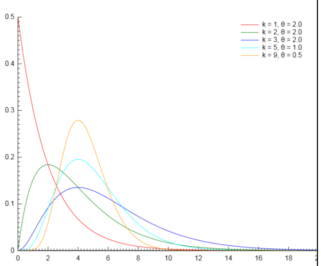


Lognormal Dağılım

## Üstel Dağılım ve Erlang Dağılımı

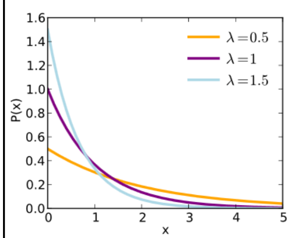


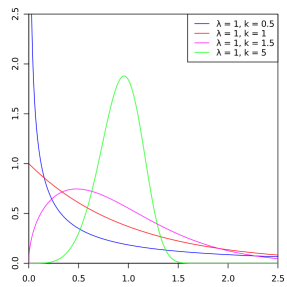

Üstel Dağılım



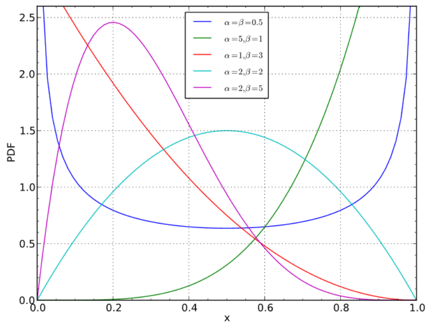
Erlang Dağılımı

## Üstel Dağılım ve Weibull Dağılımı



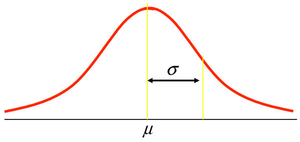
## Beta Dağılımı




## Normal Dağılım

Tanım: Sürekli bir X rasgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi ise X normal dağılımı sahiptir denir.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ,-\infty<x<\infty,\ -\infty<\mu<\infty,\ \sigma^2>0$$




Normal dağılımı ortalaması:μ ve varyansı: $\sigma^2$ olan $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ simgesiyle göstereceğiz.

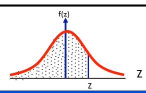
## Standart Normal Eğrinin Özellikleri

Örnek: Belli bir üniversitedeki erkek öğrencilerin ağırlıkları 68,5 kg. ortalamalı ve 2,3 kg standart sapmalı normal dağılıma sahiptir.

a) Bu üniversitede herhangi bir erkek öğrencinin 72 kg. dan daha ağır olması olasılığı nedir?

b) Üniversitedeki erkek öğrencilerin yüzde kaçının ağırlığı 70 kg. ve 72 kg. Arasındadır?

## Standart Normal Tablo



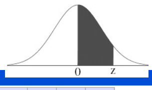

z=1,52

$P(Z<1{,}52)=0{,}9357$

$P(Z_1>1{,}52)=0{,}0643$

| Z | 0 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 |
| 1 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | $\boxed{0.9357}$ | 0.9370 | 0.9382 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 |

## Standart Normal Tablo




z=1,52

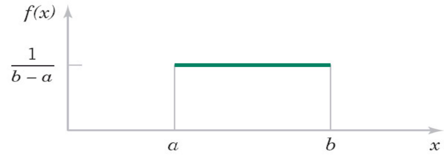
P(Z<1,52)=0,5+0,4357
=0,9357

| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .0000 | .0040 | .0080 | .0120 | .0160 | .0199 | .0239 | .0279 | .0319 | .0359 |
| 0.1 | .0398 | .0438 | .0478 | .0517 | .0557 | .0596 | .0636 | .0675 | .0714 | .0753 |
| 0.2 | .0793 | .0832 | .0871 | .0910 | .0948 | .0987 | .1026 | .1064 | .1103 | .1141 |
| 0.3 | .1179 | .1217 | .1255 | .1293 | .1331 | .1368 | .1406 | .1443 | .1480 | .1517 |
| 0.4 | .1554 | .1591 | .1628 | .1664 | .1700 | .1736 | .1772 | .1808 | .1844 | .1879 |
| 0.5 | .1915 | .1950 | .1985 | .2019 | .2054 | .2088 | .2123 | .2157 | .2190 | .2224 |
| 0.6 | .2257 | .2291 | .2324 | .2357 | .2389 | .2422 | .2454 | .2486 | .2517 | .2549 |
| 0.7 | .2580 | .2611 | .2642 | .2673 | .2704 | .2734 | .2764 | .2794 | .2823 | .2852 |
| 0.8 | .2881 | .2910 | .2939 | .2967 | .2995 | .3023 | .3051 | .3078 | .3106 | .3133 |
| 0.9 | .3159 | .3186 | .3212 | .3238 | .3264 | .3289 | .3315 | .3340 | .3365 | .3389 |
| 1.0 | .3413 | .3438 | .3461 | .3485 | .3508 | .3531 | .3554 | .3577 | .3599 | .3621 |
| 1.1 | .3643 | .3665 | .3686 | .3708 | .3729 | .3749 | .3770 | .3790 | .3810 | .3830 |
| 1.2 | .3849 | .3869 | .3888 | .3907 | .3925 | .3944 | .3962 | .3980 | .3997 | .4015 |
| 1.3 | .4032 | .4049 | .4066 | .4082 | .4099 | .4115 | .4131 | .4147 | .4162 | .4177 |
| 1.4 | .4192 | .4207 | .4222 | .4236 | .4251 | .4265 | .4279 | .4292 | .4306 | .4319 |
| 1.5 | .4332 | .434[illegible] | $\boxed{.4357}$ | 4370 | .4382 | .4394 | .4406 | .4418 | .4429 | .4441 |
| 1.6 | .4452 | .4463 | .4474 | .4484 | .4495 | .4505 | .4515 | .4525 | .4535 | .4545 |

## (Düzgün Dağılım)

Tanım : X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verildiği gibiyse X rassal değişkeni [a,b] kapalı aralığında düzgün dağılıma sahiptir.

$$f(x) = f(x; a, b) = \frac{1}{b-a} \qquad a \leq x \leq b$$




## (Düzgün Dağılım)

Örnek: Belli bir üniversitedeki erkek öğrencilerin ağırlıkları minimum 68, maksimum 74 kg. olan düzgün dağılıma uymaktadır.

a) Bu üniversitede herhangi bir erkek öğrencinin 72 kg. dan daha ağır olması olasılığı nedir?

b) Üniversitedeki erkek öğrencilerin yüzde kaçının ağırlığı 70 kg. ve 72 kg. Arasındadır?

## (Düzgün Dağılım)

## Üstel Dağılımın Hafızasızlık Özelliği

17

**Örnek:** Varsayalım ki X marka florasan lambaların ömrü $\lambda$ =0,5 yıl parametreli üstel dağılıma uyan bir rassal değişken olsun. Rasgele seçilen bir X marka florasan lambanın

a) Beklenen ömrü ne kadardır? (Diğer bir deyişle bu lambanın ortalama ömrü ne kadardır?)
b) Lambanın 1 yıldan daha kısa bir sürede tükenme olasılığı nedir?
c) Lambanın ömrünün en az 1,5 yıl olması olasılığı nedir?
d) Lambanın 1 yıldır çalıştığını varsayın. Lambanın en az 1,5 yıl daha çalışması olasılığı nedir?

(Üstel dağılımın hafızasızlık özelliği gereğince c ve d sıkkının yanıtı aynı olmalıdır.)

## Üstel Dağılımın Hafızasızlık Özelliği

18

$$f(x)=\begin{cases}\lambda.e^{-\lambda x} & \text{x>0}\\ 0 & \text{baska yerlerde}\end{cases}$$

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}\int_0^x \lambda.e^{-\lambda t}\,dt=1-e^{-\lambda x} & x\ge 0 \text{ için}\\ 0 & \text{x<0 için}\end{cases}$$

Bu durumda $P(X>x)=e^{-\lambda x}$ bulunur.

## Üstel Dağılımın Hafızasızlık Özelliği

19

$X$ : Lambanın ömrünü göstersin (yıl).

X~Üstel($\lambda=0.5$)

$a)E[X]=?$

$$E[X]=\mu=\int_{-\infty}^{+\infty}x.f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_{0}^{+\infty}x.0.5e^{-0.5x}dx=\frac{1}{\lambda}=2yıl$$

$b)P(X<1)=?$

$$P(X<1)=\int_{x=0}^{1}f(x)dx=\int_{x=0}^{1}0.5e^{-0.5.1}dx=1-e^{-0.5}$$

$$P(X<1)=F(1)=1-e^{-\lambda x}=1-e^{-0.5}\approx 0.40$$

## Üstel Dağılımın Hafızasızlık Özelliği

20

$X$ : Lambanın ömrünü göstersin (yıl).

X~Üstel($\lambda=0.5$)

$d)P(X>1{,}5)=?$

$$p(X>1{,}5)=P(X<1{,}5)=1-F(1{,}5)=1-(1-e^{-(0{,}5).(1{,}5)})$$
$$=e^{-0{,}75}\approx 0{,}47$$

$b)P(X>2{,}5|X>1)=?$

$P(X>2{,}5|X>1)=P(X>1{,}5)$ (Hafızasızlık Özelligi)

$P(X>1{,}5)\approx 0{,}47$ (c sıkkından)

## Gelişlerarası Süre ve Servis Süresinin Modellenmesi (1)

Teorem: Olayların gerçekleşmesi ortalaması $\lambda$ (olay/br.zaman) olan poisson sürecine uyuyorsa, olayların olusları arasında geçen süre ortalaması $1/\lambda$ (br.zaman/olay) olan Üstel dağılıma uyar.

Örnek: Müşteriler sisteme ortalaması 10 (müşteri/saat) olan Poisson Sürecine uygun olarak geliyorsa, müşteri gelişleri arasında geçen süre ortalaması 1/10 (saat/müşteri) olan Üstel dağılıma uyar.

## Gelişlerarası Süre ve Servis Süresinin Modellenmesi (2)

- Eğer süreler tamamen rassalsa, simulasyonda çoğu zaman Üstel dağılımla modellenir.
- Süreleri modellemek için Gamma ve Weibull dağılımları da kullanılabilir (Üstel dağılım, bu iki dağılımın özel bir durumudur).

## Gelişlerarası Süre ve Servis Süresinin Modellenmesi (3)

- Pratikte servis süreleri Üstel Dağılımın açıklayabildiğinden daha uzunsa, servis süresinin modellenmesinde Weibull dağılımı daha uygun olabilir.
- Sürekli Rassal Değişkenleri modellemede Normal Dağılım kullanılırken negatif değerler alabildiği göz önünde bulundurulmalıdır.

## Arızaya Kadarki Sürenin Modellenmesi (1)

Arıza zamanları Üstel, Gamma ve Weibull gibi bir çok dağılımla modellenebilir.

- Eğer arızalar tamamen rassal olarak oluyorsa, arızaya kadarki süre Üstel dağılımla modellenebilir.
- Gamma dağılımı, her parçanın arızaya kadarki sürelerinin üstel olduğu yedek parçaların bulundurulduğu durumda modellemede kullanılır.

## Arızaya Kadarki Sürenin Modellenmesi (2)



Sistemde bir çok parça varsa ve arıza seri bağlı bir çok parçadaki hatalardan dolayı oluşuyorsa genellikle arızaya kadarki süreyi modellemek için Weibull dağılımı uygundur.

Çoğu arıza aşınmadan kaynaklanıyorsa, normal dağılım modelleme için oldukça uygun olabilir.

Bazı parça tipleri için arızaya kadarki süreleri modellemek için Lognormal dağılım kullanılabilir.

## Veri Seti Yetersiz yada Veri Yoksa



**Düzgün Dağılım**: Gelişler arası yada servis süresinin rassal oldugu biliniyorsa, fakat dağılımıyla ilgili bilgi yoksa

**Üçgensel Dağılım**: Rassal değişkenin en küçük, en büyük ve en sık gerçekleşen değerleri hakkında varsayım yapılabiliyorsa

Çeşitli dağılım formları sağladığı için veri yoksa Beta dağılıma da kullanılabilir.