EME 3117

SISTEM SIMÜLASYONU

Rassal Değer Üretimi
Ders 11

Amaç

- Bir simulasyon modelinde girdi olarak kullanılmak üzere belirli bir dağılımdan örneklem üretilmesi
- Yaygın olarak kullanılan rassal değer üretim yöntemlerinin öğrenilmesi
  - Ters dönüşüm tekniği
  - Kabul-ret tekniği

2

Dağılımlardan Örneklem Alınması

- Tahmin edilemeyen yada belirsiz faaliyetlerin modellenmesinde istatistiksel dağılımlar kullanılır.
- Gerçek yaşam problemlerindeki gelişler arası süre, servis süreleri, talep vb. değişkenler genellikle tahmin edilemezdir.
- Bu tür değişkenler, belli bir istatistiksel dağılıma sahip rassal değişkenler olarak modellenebilir.

Rassal Değer Üretme Teknikleri

- Rassal değer üretme tekniklerinin tümü [0,1] aralığında Düzgün dağılmış rassal sayıların elimizde mevcut olduğunu varsayar.

Her bir R_i rassal sayı için:

$$f_R(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$F_R(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Ters Dönüşüm Tekniği

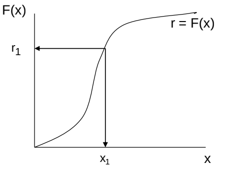
Üstel, Düzgün, Weibull ve deneysel sürekli dağılımların yanı sıra bir çok kesikli dağılımdan örneklem almaya uygun bir yöntemdir.

Hesaplama yönünden basit ve direk bir yöntem olmasına karşın, her zaman etkin değildir.

Ters Dönüşüm Tekniği (Devam)

- Tekniğin temel mantığı:
  - r = F(x) birikimli dağılım fonksiyonu için
  - [0,1] düzgün dağılımından r rassal sayısını üret
  - x'i hesapla.

$$\boxed{x = F^{-1}(r)}$$



Uygulamalar

- [a,b] aralığında Düzgün Değer Üretimi
- Üstel Değer Üretimi

[a,b] Aralığında Düzgün Değer Üretimi

(Ters Dönüşüm)

- Düzgün dağılmış X rassal değişkenine ait f(x) olasılık yogunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{Aksi Halde} \end{cases}$$

f(x): Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (Probability density function, pdf):

[a,b] Aralığında Düzgün Değer Üretimi (Devam) (Ters Dönüşüm)

- X rassal değişkeninin Birikimli Dağılım Fonksiyonu F(x), Olasılık Yogunluk Fonksiyonu f(x)'in integrali alınarak bulunur.

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x - a}{b - a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

F(x): Birikimli (Olasılık) Dağılım Fonksiyonu (Cumulative density function, cdf)

[a,b] Aralığında Düzgün Değer Üretimi (Devam) (Ters Dönüşüm)

- Düzgün dağılımdan değerler üretmede ters dönüşüm metodunu kullanmak için $F_x(x)$ = R alınır ve x aşağıdaki gibi çözülür:

$$\frac{x-a}{b-a} = R \rightarrow x = F^{-1}(x) = (b-a) \times R + a$$

- Artık, [a,b] aralığında Düzgün rassal değer üretebiliriz:
  - [0,1] aralığında Düzgün R üret
  - x = a + R (b -a)

Üstel Dağılım (Ters Dönüşüm)

11

$$f(x) = \begin{cases} le^{-lx} & x \ge 0 \\ 0 & \text{A ksi Halde} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 - e^{-lx} & 0 \le x \le \infty \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{l} \qquad l = \frac{1}{E[X]}$$

Üstel Dağılım (Devam) (Ters Dönüşüm)

12

1- İstenilen X rassal değişkeni için kümülatif yoğunluk fonksiyonu hesaplanır.

Üstel Dağılım İçin: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \ge 0$

2- X aralığında $F(X) = R$ ataması yapılır:

$$1 - e^{-\lambda X} = R, \quad x \ge 0 \text{ için}$$

X rasgele bir değişken dolayısı ile $1 - e^{-\lambda X}$ da rasgele bir değişkendir.

Üstel Dağılım (Devam)
(Ters Dönüşüm)

13

3- $F(X) = R$ eştliği X'i R cinsinden ifade edecek şekilde çözülür :

$$1 - e^{-\lambda X} = R$$
$$e^{-\lambda X} = 1 - R$$
$$-\lambda X = \ln(1 - R)$$
$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - R)$$

Bu ifade üstel dağılım için rasgele değişken üreteci olarak adlandırılır.
Genel gösterimi: $X = F^{-1}(R)$

Üstel Dağılım (Devam)
(Ters Dönüşüm)

14

4- R_1, R_2, R_3,... rasgele sayıları üretilerek $X_i = F^{-1}(R_i)$ eşitliği yardımı ile istenen rasgele değişkenler hesaplanır.

Üssel dağılım için : $X_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - R_i)$

Hem R_i' nin hem de $(1 - R_i)$'nin uniform dağılmış olması nedeni ile $(1 - R_i)$ yerine R_i yazılarak eşitlik biraz daha basitleştirilebilir:

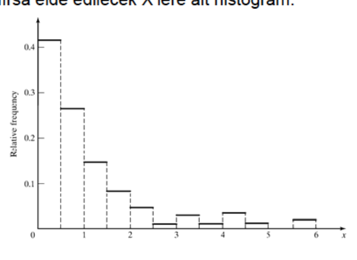
$$X_i = -\frac{1}{\lambda}\ln R_i$$

Üstel Dağılım (Devam)
(Ters Dönüşüm)

15

Örnek: *exp(λ= 1)* dağılımına sahip *200* adet X_i rasgele değişkeni üretmek isteyelim:

- U(0,1) olan *200* rasgele sayı üretilip $X_i = -\frac{1}{\lambda}\ln R_i$ eşitliği kullanılırsa elde edilecek X'lere ait histogram:



Üstel Dağılım (Devam)
(Ters Dönüşüm)

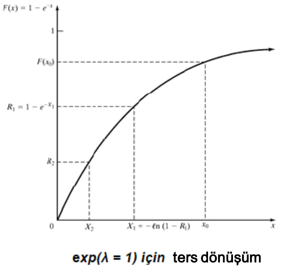
16

Üstel Dağılım için:
❑Üstel Birilimli Dağılım:

$$r = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

- X_1, X_2, X_3 … rasgele değişkenlerini üretmek için:

$$X_i = F^{-1}(R_i) - \frac{1}{\lambda}\ln(1 - R_i)$$



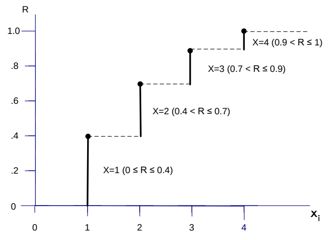
exp(λ = 1) için **ters dönüşüm**

Deneysel Kesikli Dağılım

(Ters Dönüşüm)

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	0.4	0.3	0.2	0.1
$F(x_i)$	0.4	0.7	0.9	1.0

$$F(x)=\begin{cases} 0 & if\ x<1 \\ 0.4 & if\ 1\le x<2 \\ 0.7 & if\ 2\le x<3 \\ 0.9 & if\ 3\le x<4 \\ 1 & if\ 4\le x \end{cases}$$



Deneysel Kesikli Dağılım (Devam)

(Ters Dönüşüm)

Eğer R_i aralıktaysa	x_i
$0 £ R_i £ 0.4$	1
$0.4 < R_i £ 0.7$	2
$0.7 < R_i £ 0.9$	3
$0.9 < R_i £ 1.0$	4

Kesikli Ters Dönüşüm Algoritması

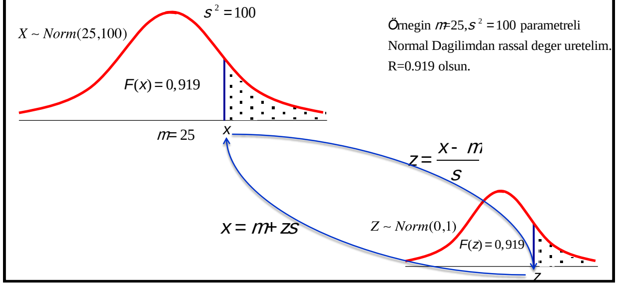
(0,1) Düzgün dağılımdan rassal sayı r_i üret.

```
for i=1 to n
    if ri ≤ F(xi)
        Rassal Değer=xi
    end
end
```

Rassal Normal Değer Üretme

(0,5<Rassal Sayı<1)

- r = F(x) birikimli dağılım fonksiyonu için
- [0,1] düzgün dağılımından r rassal sayısını üret
- x'i hesapla.



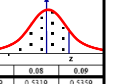
Örnegin $m=25, s^2=100$ parametreli Normal Dagilimdan rassal deger uretelim. R=0.919 olsun.

Rassal Normal Değer Üretme

(0,5<Rassal Sayı<1)

$P(Z £ 1,4) = 0,919$

$z = 1,4$



$x = m + zs$

$= 25 + 1,4.10$

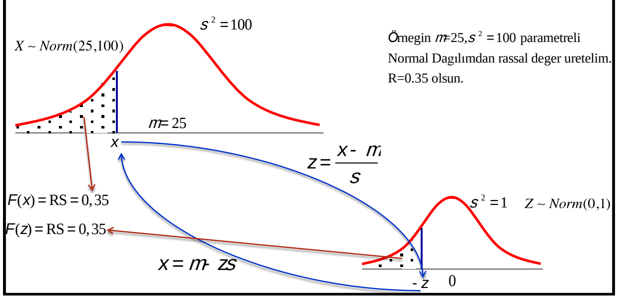
$= 39$

Z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

Rassal Normal Değer Üretme

(0<Rassal Sayı<0,5)

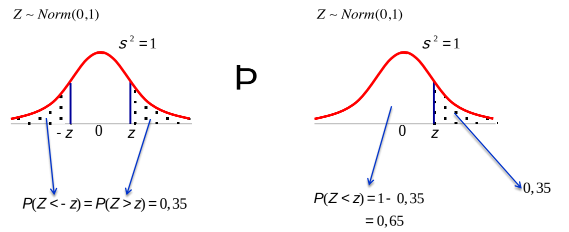
Üretilen rassal sayının 0.5'ten küçük olması normal dağılımdan üretilecek değerin ortalamadan küçük olduğunu gösterir.



Örnegin μ=25, $\sigma^2 = 100$ parametreli Normal Dagılımdan rassal deger uretelim. R=0.35 olsun.

Rassal Normal Değer Üretme

(0<Rassal Sayı<0,5)



Rassal Normal Değer Üretme

(0<Rassal Sayı<0,5)

$P(Z \le 0.39) = 0,65$

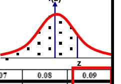
$P(Z \le -0.39) = 0,35$

$z = 0,39$

$x = \mu - z\sigma$

$= 25 - 0,39.10$

$= 21,1$



z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

Rassal Weibull Değer Üretme

Weibull Dağılımı için Birikimli Dağılım Fonksiyonu: F(x)=1-e$^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}$

R=F(x)=1-e$^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}$

$$e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} = 1 - R$$

$$-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} \ln e = \ln(1-R)$$

$$-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} = \ln(1-R)$$

$$\left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} = \left[-\ln(1-R)\right]^{1/\alpha}$$

$$\left(\frac{x}{\beta}\right) = \left[-\ln(1-R)\right]^{1/\alpha}$$

$$\boxed{x = \beta\left[-\ln(1-R)\right]^{1/\alpha}}$$