

EME 3117

SİSTEM SİMÜLASYONU

Rassal Sayı Üretimi

Ders 10

Rassal Sayı ve Rassal Değer Üretimi

Girdi Analizi bölümünde gözlemlerden elde edilen verilere en uygun dağılımı uydurmuştuk. Bu günkü derste bu dağılımlardan simülasyonda kullanmak için nasıl rassal değişken üretileceği üzerinde durulacaktır.

Örneğin bir eczaneye müşteri gelişleri arasında geçen sürenin dağılımı Arena'da EXPO(30 dk.) olarak belirlenmiş olsun. Bu dağılımdan simülasyonda kullanacağımız gelişler arası süreler nasıl üretilbilir?

Rassal Sayı ve Rassal Değer Üretimi

Herhangi bir dağılımdan rassal bir değişken üretebilmek için $U(0,1)$ rassal değişkenleri gereklidir.

Rassal sayılar, birbirinden bağımsız ve görülme olasılıkları eşit olan sayıların oluşturduğu dizilerdir. Bu sayı dizileri eşit olasılık gereği, Düzgün (Uniform) olasılık dağılımı gösterir.

Rassal Sayı Üretimi

Bir simülasyonda kullanılan rassal sayılar, gerçekte rassal değildir!

Tanım:

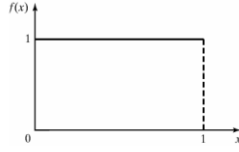
Bir sözde rassal sayılar dizisi $U(i)$, gerçek rassal sayılar dizisi $U(0,1)$ 'deki bazı ilgili istatistiksel özelliklere sahip deterministik sayılar dizisidir.

Rassal Sayıların Dağılımı

- R_i , rasgele sayısı olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi olan uniform bir dağılımdan bağımsız olarak seçilmelidir:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$E(R) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$



Şekil: rasgele sayılar için pdf

Rassal Sayıların Özellikleri

Düzdün ve bağımsızlık özelliğinin iki sonucu;

- 1) (0,1) aralığı, eşit uzunlukta k sınıfa bölünürse, N; gözlemlerin toplam sayısı olmak üzere, her aralıktaki gözlemlerin beklenen değeri:

$$B = \frac{N}{k}$$

- 2) Bir aralıkta bir değer gözlemlenme olasılığı, elde edilen bir önceki değerden bağımsızdır.

Rassal Sayı Üreteçlerinde İstenen Özellikler

RN rutinlerinde dikkat edilecek önemli hususlar:

- Hızlı
- Farklı bilgisayarlara taşınabilir
- Yeterince uzun çevrime sahip
- Yinelenebilir (aynı başlangıç koşulları verildiğinde)
- Düzdünlük ve bağımsızlık için gerekli ideal istatistiksel özellikleri sağlama

1) Orta Kare Yöntemi

Bu yöntemde

- i) (m) basamaklı ve genellikle tek olan bir sayı başlangıç değeri (seed) olarak alınır.
- ii) Bu sayının karesi alınarak bulunan sayının ortasındaki m kadar basamaklı sayı alınır.
- iii) Alınan bu sayı rassal sayı olarak kaydedilir.
- iv) İstenen sayıda rassal sayı elde edene dek ii, iii, iv tekrar edilir.

Örnek

$$X_0 = 5497 \text{ (Seed)}$$

$$X_0^2 = (5497)^2 = 30217009 \text{ ise } X_1 = 2170$$

$$U_1 = 0.2170$$

$$X_1^2 = (2170)^2 = 04708900 \text{ ise } X_2 = 7089$$

$$U_2 = 0.7089$$

.

.

.

2) Doğrusal Eşlik Üreteci (Linear Congruential Generator)

Tanım: Bir LCG aşağıda verilen tekrarlanan ilişkiye göre belirlenen 0 ve m-1 arasındaki (R_0, R_1, \dots) tam sayılar dizisi tanımlar:

$$R_{i+1} = (aR_i + c) \bmod m \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

R_0 : dizinin başlangıç değeri

a : sabit çarpan katsayısı

c : artış miktarı

m : modulus

(m, a, c, R_0) tamsayı ve $a > 0$, $c \geq 0$, $m > 0$, $m > a$, $m > c$, $m > R_0$,
 $0 \leq R_i \leq m-1$

$$U_i = R_i / m$$

LCG Örnek

$(m=8, a=5, c=1, R_0=5)$ parametrelili Doğrusal Eşlik Üreteç (LCG) düşünün. Tanımlanan diziden ilk 9 R_i ve U_i değerlerini hesaplayın.

Mod operatörü:

$$z = y \bmod m \Leftrightarrow z = y - m \left\lfloor \frac{y}{m} \right\rfloor$$

$\lfloor x \rfloor$, en büyük tamsayı $\leq x$

Örneğin, $z = 17 \bmod 3 \Leftrightarrow z = 17 - 3 \left\lfloor \frac{17}{3} \right\rfloor = 17 - 3 \times 5 = 2$.

Çözüm

$$R_{i+1} = (aR_i + c) \bmod m \quad i = 0, 1, 2,$$

$$(m=8, a=5, c=1, R_0=5)$$

- Rastgele sayıların $U_i = R_i / m$ olduğuna dikkat edin.

$$R_1 = (5R_0 + 1) \bmod 8 = 26 \bmod 8 = 2 \Rightarrow U_1 = 0.25$$

$$R_2 = (5R_1 + 1) \bmod 8 = 11 \bmod 8 = 3 \Rightarrow U_2 = 0.375$$

$$R_3 = (5R_2 + 1) \bmod 8 = 16 \bmod 8 = 0 \Rightarrow U_3 = 0.0$$
- Sayıların çevrim dizilerinde tekrarlanıp tekrarlanmadığına dikkat edin.

$$R_4 = (5R_3 + 1) \bmod 8 = 1 \bmod 8 = 1 \Rightarrow U_4 = 0.125$$

$$R_5 = 6 \Rightarrow U_5 = 0.75$$

$$R_6 = 7 \Rightarrow U_6 = 0.875$$

$$R_7 = 4 \Rightarrow U_7 = 0.5$$
- Uzun çevrim periyoduna sahip a , m ve c belirlenmesi amaçlanır.

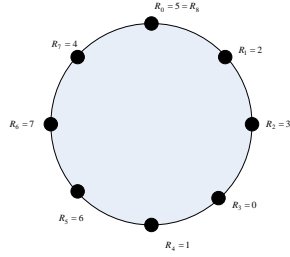
$$R_8 = 5 \Rightarrow U_8 = 0.625$$

$$R_9 = 2 \Rightarrow U_9 = 0.25$$

Rassal Sayı Dizileri

13

- Örneğin $R_1 = 2$ gibi bir çekirdek (seed), bir rassal dizisinde başlangıç yerini tanımlar.
- Rassal sayı dizisi, farklı çekirdeklerle tanımlanan dizileri gösterir.
- Farklı görevlerde bağımsız rassal sayıları kullanabilmek için çevrimi aynı dizilere bölmek isteriz.



Rassal Sayılar Tablosu

14

Random Number Table

13662	70592	65172	28053	02190	83634	66012	70305	66781	80344
43905	46941	72300	11641	43548	30495	07686	31840	03261	89139
00504	48658	38051	59408	16508	82979	92002	63606	41078	86326
61274	57238	47267	35303	29666	02140	60867	39847	50968	96719
43753	21159	16239	50595	62509	61207	86816	29902	23395	72640
83003	51662	21636	68192	84294	38754	84755	34053	94582	29215
36807	71420	35804	44862	23577	79551	42003	58984	09271	68396
19110	56960	18762	41487	16614	83053	00512	16749	45347	88199
82615	86984	93290	87971	60022	35415	20852	02909	99478	45568
05621	26584	36493	63013	68181	57702	49510	75304	38724	15712
06936	37293	55875	71213	63025	46063	74665	12178	10741	68362
84881	60458	16194	92403	80951	80068	47076	23310	74899	87529
66354	88441	96191	04794	14714	64749	43097	83976	83281	72038
49602	94109	36460	62393	00721	66980	82554	90270	12312	56299
78430	72391	96973	70437	57803	78683	04670	70967	58912	21863
33331	51803	15934	79807	46561	80188	78984	29317	27971	16440
62843	84445	56652	91797	45284	25842	96246	73504	21631	81223
19528	15445	77764	33446	41204	70067	33354	70960	66664	75486
16737	01887	50934	43306	75190	86997	56561	79018	34273	29196
96389	06685	45945	62000	76228	60645	87750	46329	46544	95685

Rassal Sayı Üreteçlerinin Testleri

15

- Kolmogorov-Smirnov Testi
- Ki-Kare Testi
- Bağımsızlık testleri
 - ▣ Koşu (run) testi
 - ▣ Otokorlasyon (Autocorrelation) testi
 - ▣ Poker testi