

EME 3105

SİSTEM SİMÜLASYONU

Simulasyon Örnekleri

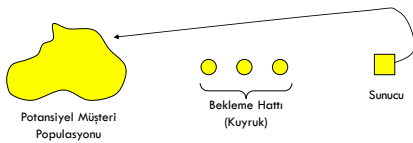
Ders 2

Giriş

Bu derste bilgisayar yardımı olmaksızın çalıştırılabilen birkaç simulasyon örneği verilmiştir.

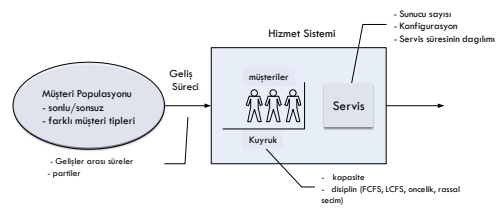
Bu örnekler size sistem simulasyonu metodolojisini ve beraberinde yapılması gereken analizleri anlamana yardımcı olacaktır.

Kuyruk Sistemlerinin Simulasyonu



Bir kuyruk sistemi; müşteri populasyonu, gelişlerin doğası, servis mekanizması, sistem kapasitesi ve kuyruk disipliniyle tanımlanır.

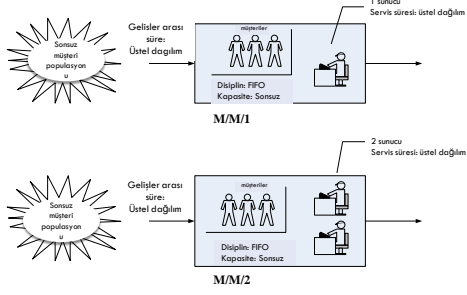
Tek Kanallı Kuyruk Sistemi



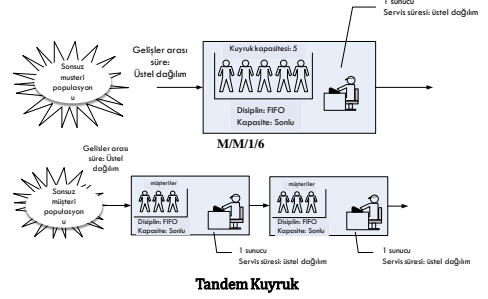
Kendall Gösterimi

- geliş süreci /servis süreci /sunucu sayısı /sistem kapasitesi /populasyon büyüklüğü /kuyruk disiplini
- Örnek: $M/M/1$

Tek Kanallı Kuyruk Durumları



Tek Kanallı Kuyruk Durumları (devam)



Kuyruk Sisteminin Bileşenleri

Sistem Durumu: Sistemdeki müşteri sayısı ve sunucunun durumu (sunucu dolu/boş)

Olay: Sistemin durumunda anlık değişmeye neden olan durum seti

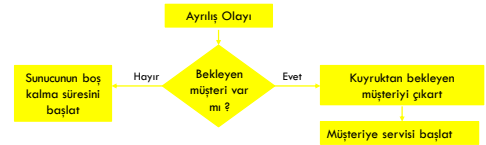
Tek sunuculu kuyruk sisteminde sistemin durumunu etkileyen sadece iki olası olay vardır:

- Geliş olayı
- Ayrılış olayı

Simulasyon Saati: Simüle edilen süreyi izlemek için kullanılır.

Müşterinin Sistemden Ayrılışı

Bir müşterinin servisi sunucuda tamamlandığı anda simulasyon aşağıdaki akış şemasına göre devam eder.



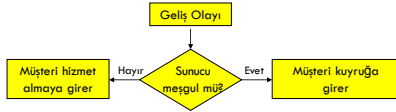
Servis tamamlandığı andaki akış diyagramı

Müşterinin Sisteme Gelişi

Bir müşteri sisteme girdiğinde geliş olayı açığa çıkar.

Gelen müşteri sunucuyu ya boş, yada dolu bulur:

- Sunucu boş ise: müşteri hemen servise almaya girer.
- Sunucu dolu ise: müşteri kuyruğa girer



Sisteme Giren Müşterinin Akış Diyagramı

Tanımlayıcı Değişkenler

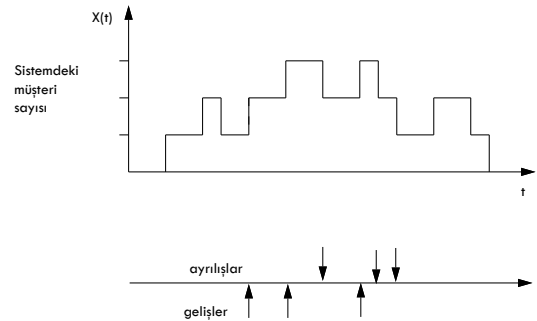
Tek bir kuyruk hattından gelen müşterilere 2 vezne tarafından servis (hizmet) verilen bir banka şubesini ele alalım. Varsayalım ki banka saat 9.00'da açılınsın (simulasyonda 0 anı olarak modelleyebiliriz).

Banka vezneleri (meşgul yada boş olmalarıyla) ve kuyrukta bekleyen müşterilerle ilgilenmektedir.

Tanımlayıcı Değişkenler (devam)

- i 'nci müşterinin geliş zamanı
- i 'nci müşterinin servis (hizmet görme) süresi
- i 'nci müşterinin ayrılış zamanı
- t anında kuyrukta bekleyen müşteri sayısı
- t anında meşgul olan sunucu (vezne) sayısı
- t anında i 'nci sunucunun (veznenin) meşgul olup olmaması
- t anında sistemdeki (bankadaki) müşteri sayısı

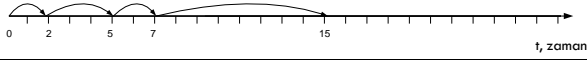
Zamanla Durum Değişkeninin Değişimi



Müşterilerin Geliş Zamanı

13

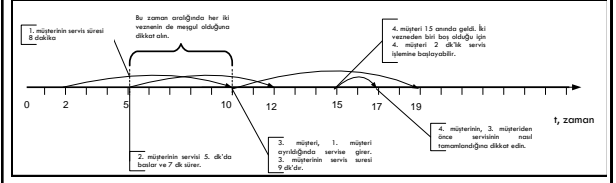
Müşteri	Geliş zamanı	Gelişler arası süre
1	2	2
2	5	3
3	7	2
4	15	8



Gelişler & Servisler

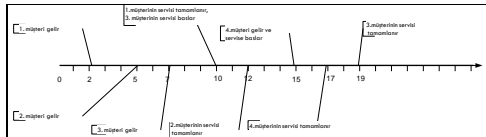
14

Müşteri	Geliş Zamanı	Servise başlama zamanı	Servis Süresi	Servisin Tamamlanma Zamanı
1	2	2	8	10
2	5	5	7	12
3	7	10	9	19
4	15	15	2	17



Olaylar

Zaman	Olay	Açıklama
0	Banka açılır	
2	Geliş	1. müşteri gelir, 8 dakika için servise girer, vezne 1 meşgul hale gelir.
5	Geliş	2. müşteri gelir, 7 dakika için servise girer, vezne 2 meşgul hale gelir.
7	Geliş	3. müşteri gelir, kuyruğa bekler.
10	Servis tamamlanması	1. müşterinin vezne 1'deki servisi tamamlanır, 3. müşteri kuyruktan çıkar ve 9 dakika için servise girer.
12	Servis tamamlanması	2. müşterinin vezne 2'deki servisi tamamlanır, kuyruğa müşteri bulunmadığı için vezne 2 boş hale gelir.
15	Geliş	4. müşteri gelir, 2 dk için servise girer, vezne 2 meşgul hale gelir.
17	Servis tamamlanması	4. müşterinin vezne 2'deki servisi tamamlanır, vezne 2 boş hale gelir.
19	Servis tamamlanması	3. müşterinin servisi tamamlanır.



Simülasyonunun 3 Adımı

1. Simülasyonun her bir girdisinin özelliklerini belirle. Genellikle bu girdiler kesikli/sürekli olasılık dağılımları olarak modellenir.
2. Bir simülasyon tablosu oluştur. Simülasyon tabloları probleme göre geliştirilir. Her simülasyon tablosu birbirinden farklıdır.
3. Her tekrar için girdi değeri üret ve fonksiyonu değerlendirip her tekrar için bir çıktı değeri hesapla. (Girdi değerleri adım 1'de belirlenen dağılımlardan örneklem alınarak hesaplanabilir.)

Simülasyon Tablosu

Simülasyon tablosu, zamana bağlı olarak değişen sistem durumunu izlemek için sistematik bir metot sağlar.

Tekrarlar	Girdiler						Yanıt
	X_{i1}	X_{i2}	...	X_{ip}	...	X_{ip}	Y_i
1							
2							
.							
.							
.							
n							

Tek Kanallı Kuyruk Sisteminde Rassallık

Gelişlerarası Süre ve Servis Süresi: Rassal Değişken

Gelişlerarası süreler ve servis süreleri, bu rassal değişkenlerin dağılımlarından rassal sayılar kullanılarak üretilir.

Rassal sayılar, (0,1) aralığında bağımsız ve düzgün (uniform) dağılmış sayılardır.

Örnek 1

Tek bir kasanın bulunduğu küçük bir marketi ele alalım. Müşteriler kasaya gelişleri birbirinden bağımsızdır ve 1-8 dk. arasında kesikli düzgün dağılıma uymaktadır. Servis süreleri ise aşağıdaki tabloda verilen kesikli dağılıma uymaktadır. 20 müşteri için marketin kuyruk sistemini simüle ederek, analiz edin.

Örnek 1 (Devam)

X: Müşteri gelişleri arasında geçen süre (dakika)

$X \sim$ Kesikli Düzgün (1,8)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x)$	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125

Y: Servis süresi (dakika)

y	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y)$	0.10	0.20	0.30	0.25	0.10	0.05

Rassal Sayılar Tablosu

Table 1— Random Numbers

92630	78240	19267	95457	53497	23894	37708	79862	76471	66418
79445	78735	71549	44843	26104	67318	00701	34986	66751	99723
59654	71966	27386	50004	05358	94031	29281	18544	52429	06080
31524	49587	76612	39789	13537	48086	59483	60680	84675	53014
06348	76938	90379	51392	55887	71015	09209	79157	24440	30244
28703	51709	94456	48396	73780	06436	86641	69239	57662	80181
68108	89266	94730	95761	75023	48464	65544	96583	18911	16391
99938	90204	03621	66378	1392	08808	0634	512	01516	37708

Gelişler Arası Sürenin Dağılımı

x(dakika)	f(x)=P(X=x)	F(x)=P(X≤x)	Rassal Sayı (RS)
1	0.125	0.125	0<RS≤0.125
2	0.125	0.250	0.125<RS≤0.250
3	0.125	0.375	0.250<RS≤0.375
4	0.125	0.500	0.375<RS≤0.500
5	0.125	0.625	0.500<RS≤0.625
6	0.125	0.750	0.625<RS≤0.750
7	0.125	0.875	0.750<RS≤0.875
8	0.125	1.000	0.875<RS≤1.000

Servis Süresinin Dağılımı

y(dakika)	f(y)=P(Y=y)	F(y)=P(Y≤y)	Rassal Sayı (RS)
1	0.10	0.10	0<RS≤0.10
2	0.20	0.30	0.10<RS≤0.30
3	0.30	0.60	0.30<RS≤0.60
4	0.25	0.85	0.60<RS≤0.85
5	0.10	0.95	0.85<RS≤0.95
6	0.05	1.00	0.95<RS≤1.00

Gelişler Arası Sürelerin Üretilmesi

Müşteri	Rassal Sayı (RS)	Gelişler Arası Süre (dk)	Müşteri	Rassal Sayı (RS)	Gelişler Arası Süre (dk)
1	-	-	11	0.109	1
2	0.913	8	12	0.093	1
3	0.727	6	13	0.607	5
4	0.015	1	14	0.738	6
5	0.948	8	15	0.359	3
6	0.309	3	16	0.888	8
7	0.922	8	17	0.106	1
8	0.753	7	18	0.212	2
9	0.235	2	19	0.493	4
10	0.302	3	20	0.535	5

Servis Sürelerinin Üretilmesi

Müşteri	Rassal Sayı (RS)	Servis Süresi (dakika)
1	0.843	4
2	0.101	1
3	0.744	4
4	0.535	3
5	0.178	2
6	0.792	4
7	0.915	5
8	0.670	4
9	0.899	5
10	0.385	3

Müşteri	Rassal Sayı (RS)	Servis Süresi (dakika)
11	0.321	3
12	0.943	5
13	0.795	4
14	0.052	1
15	0.791	5
16	0.844	4
17	0.522	3
18	0.551	3
19	0.302	2
20	0.505	3

Geliş & Servis Süreleri

Gelişler Arası Süre			Servis Süresi			
x (dakika)	F(x)=P(X≤x)	Rassal Sayı (RS)	y (dakika)	f(y)=P(Y=y)	F(y)=P(Y≤y)	Rassal Sayı (RS)
1	0.125	0<RS≤0.125	1	0.10	0.10	0<RS≤0.10
2	0.250	0.125<RS≤0.250	2	0.20	0.30	0.10<RS≤0.30
3	0.375	0.250<RS≤0.375	3	0.30	0.60	0.30<RS≤0.60
4	0.500	0.375<RS≤0.500	4	0.25	0.85	0.60<RS≤0.85
5	0.625	0.500<RS≤0.625	5	0.10	0.95	0.85<RS≤0.95
6	0.750	0.625<RS≤0.750	6	0.05	1.00	0.95<RS≤1.00
7	0.875	0.750<RS≤0.875				
8	1.000	0.875<RS≤1.000				

Rassal Sayılar:

0.843 0.913 0.100 0.727 0.744 0.015 0.535 0.948 0.178 ...

Simulasyon Tablosu

Müşteri	Gelişler Arası Süre	Geliş Zamanı	Servis Süresi	Servisin Başlama Zamanı	Kuyruқта Bekleme Süresi	Servisin Bitiş Zamanı	Sisteme Harcanan Süre	Sonucunun Boş Kalma Süresi
1	-	0	4	0	0	4	4	0
2	8	8	1	8	0	9	1	4
3	6	14	4	14	0	18	4	5
4	1	15	3	18	3	21	6	0
5	8	23	2	23	0	25	2	2
18	2	73	3	78	5	81	8	0
19	4	77	2	81	4	83	6	0
20	5	82	3	83	1	86	4	0
		68		56		124		18

Simulasyon Tablosu (Tamamlanmış)

Müşteri	Gelişler Arası Süre (dk.)	Geliş Zamanı	Servis Süresi (dk.)	Servise Başlama Zamanı	Müşterinin Kuyruқта Bekleme Süresi (dk.)	Servisin Tamamlanma Zamanı	Müşterinin Sisteme Harcadığı Süre (dk.)	Sonucunun Boş Kalma Süresi (dk.)
1	-	0	4	0	0	4	4	0
2	8	8	1	8	0	9	1	4
3	6	14	4	14	0	18	4	5
4	1	15	3	18	3	21	6	0
5	8	23	2	23	0	25	2	2
6	3	26	4	26	0	30	4	1
7	8	34	5	34	0	39	5	4
8	7	41	4	41	0	45	4	2
9	2	43	5	45	2	50	7	0
10	3	46	3	50	4	53	7	0
11	1	47	3	53	6	56	9	0
12	1	48	5	56	8	61	13	0
13	5	53	4	61	8	65	12	0
14	6	59	1	65	6	66	7	0
15	3	62	5	66	4	71	9	0
16	8	70	4	71	1	75	5	0
17	1	71	3	75	4	78	7	0
18	2	73	3	78	5	81	8	0
19	4	77	2	81	4	83	6	0
20	5	82	3	83	1	86	4	0
		68		56		124		18

Performans Ölçümleri

Müşteri	Gelirilen Arası Süre (dk.)	Geliş Zamanı	Servis Süresi (dk.)	Servis Bekleme Zamanı	Müşterinin Bekleme Süresi (dk.)	Servis Sonrası Bekleme Zamanı	Müşterinin Bekleme Süresi (dk.)	Sistemden Beklenen Süre (dk.)
1	0	0	4	0	0	4	4	0
2	6	0	1	0	0	1	1	4
3	0	12	4	14	0	18	4	6
10	4	77	2	83	4	87	0	0
20	7	82	2	89	2	91	0	0
							172	10

1. Ortalama Kuyrukta Bekleme Süresi=2.8 dk

$$\text{ortalama bekleme süresi} = \frac{\text{müşterilerin kuyrukta geçirdiği toplam süre}}{\text{toplam müşteri sayısı}} = \frac{56}{20} = 2.8 \text{ (dk.)}$$

2. Kuyrukta Bekleme Olasılığı=0.65

$$\text{olasılık (bekleme)} = \frac{\text{kuyrukta bekleyen müşteri sayısı}}{\text{toplam müşteri sayısı}} = \frac{13}{20} = 0.65$$

3. Sunucunun Boş Kalma Olasılığı=0.21

$$\text{sunucunun boş kalma olasılığı} = \frac{\text{sunucunun toplam boş kalma süresi}}{\text{simulasyonun toplam çalışma süresi}} = \frac{18}{86} = 0.21$$

Sunucunun Meşgul Olma Olasılığı=0.79

Performans Ölçümleri (Devam)

Müşteri	Gelirilen Arası Süre (dk.)	Geliş Zamanı	Servis Süresi (dk.)	Servis Bekleme Zamanı	Müşterinin Bekleme Süresi (dk.)	Servis Sonrası Bekleme Zamanı	Müşterinin Bekleme Süresi (dk.)	Sistemden Beklenen Süre (dk.)
1	0	0	4	0	0	4	4	0
2	6	0	1	0	0	1	1	4
3	0	12	4	14	0	18	4	6
10	4	77	2	83	4	87	0	0
20	7	82	2	89	2	91	0	0
							172	10

4. Ortalama Servis Süresi=3.4 dk

$$\text{ortalama servis süresi} = \frac{\text{toplam servis süresi}}{\text{toplam müşteri sayısı}} = \frac{68}{20} = 3.4 \text{ (dk.)}$$

Teorik ortalama servis süresi, servis süresi dağılımı kullanılarak bulunabilir.

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} y \cdot P(Y = y)$$

$$E(Y) = 1(0.10) + 2(0.20) + 3(0.30) + 4(0.25) + 5(1.10) + 6(0.05) = 3.2 \text{ (dk.)}$$

Görüldüğü üzere 20 müşteri için simulasyonun ortalama servis süresi, teorik ortalama servis süresinden farklıdır. Simulasyon uzatıldıkça, teorik ortalama bekleme süresi E(Y)'ye yaklaşacaktır.

Performans Ölçümleri (Devam)

Müşteri	Gelirilen Arası Süre (dk.)	Geliş Zamanı	Servis Süresi (dk.)	Servis Bekleme Zamanı	Müşterinin Bekleme Süresi (dk.)	Servis Sonrası Bekleme Zamanı	Müşterinin Bekleme Süresi (dk.)	Sistemden Beklenen Süre (dk.)
1	0	0	4	0	0	4	4	0
2	6	0	1	0	0	1	1	4
3	0	12	4	14	0	18	4	6
10	4	77	2	83	4	87	0	0
20	7	82	2	89	2	91	0	0
							172	10

5. Ortalama Gelişler Arası Süre=4.3 dk

$$\text{ortalama gelişler arası süre} = \frac{\text{toplam gelişler arası süre}}{\text{geliş sayısı} - 1} = \frac{82}{19} = 4.3 \text{ (dk.)}$$

İlk müşterinin 0 anında sistemde olduğu varsayıldığı için

Teorik ortalama gelişler arası süre, gelişler arası süre dağılımı kullanılarak bulunabilir. Gelişler Arası Süre X, 1-8 arasında kesikli düzgün dağılıma uymaktaydı.

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P(X = x)$$

$$E(X) = 1(0.125) + 2(0.125) + 3(0.125) + 4(0.125) + 5(1.125) + 6(0.125) + 7(0.125) + 8(0.125) = 4.5 \text{ (dk.)}$$

yada $E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+8}{2} = 4.5 \text{ dk.}$

Simulasyon uzatıldıkça, teorik ortalama gelişler arası süre E(X)'e yaklaşacaktır.

Performans Ölçümleri (Devam)

Müşteri	Gelirilen Arası Süre (dk.)	Geliş Zamanı	Servis Süresi (dk.)	Servis Bekleme Zamanı	Müşterinin Bekleme Süresi (dk.)	Servis Sonrası Bekleme Zamanı	Müşterinin Bekleme Süresi (dk.)	Sistemden Beklenen Süre (dk.)
1	0	0	4	0	0	4	4	0
2	6	0	1	0	0	1	1	4
3	0	12	4	14	0	18	4	6
10	4	77	2	83	4	87	0	0
20	7	82	2	89	2	91	0	0
							172	10

6. Kuyrukta Bekleyen Bir Müşterinin Ortalama Bekleme Süresi=4.3 dk

$$\text{Kuyrukta bekleyen müşterilerin ortalama bekleme süresi} = \frac{\text{toplam kuyruk bekleme süresi}}{\text{kuyrukta bekleyen toplam müşteri sayısı}} = \frac{56}{13} = 4.3 \text{ (dk.)}$$

Müşteri Sayısı	Gelen Arama Sayısı		Servis Süresi		Müşterilerin Beklenen Süresi		Müşterilerin Beklenen Servis Süresi	
	Ortalama (dk)	Standart Sapma (dk)	Ortalama (dk)	Standart Sapma (dk)	Ortalama (dk)	Standart Sapma (dk)	Ortalama (dk)	Standart Sapma (dk)
1	8	4	1	0	0	0	4	0
2	8	0	1	0	0	0	1	0
3	0	16	1	14	0	16	0	0
10	0	72	2	62	0	62	0	0
20	1	80	2	81	0	80	0	0
			20		0		124	0

Performans Ölçümleri (Devam)

7. Bir Müşterinin Sistemde Geçirdiği Ortalama Süre=6.2 dk

müşterinin sistemde geçirdiği ortalama süre = $\frac{\text{müşterilerin sistemde geçirdiği toplam süre}}{\text{toplam müşteri sayısı}} = \frac{124}{20} = 6.2 \text{ (dk)}$

S : Bir müşterinin sistemde geçirdiği süre
S₁ : Bir müşterinin kuyrukta geçirdiği süre
S₂ : Bir müşterinin serviste geçirdiği süre

S = S₁ + S₂
 $E[S] = E[S_1 + S_2] = E[S_1] + E[S_2]$
(Beklenen Değer Özelliği: Toplamın beklenen değeri, beklenen değer toplamına eşittir.)

$E[S_1] = 2.8 \text{ (dk)}$ (Performans ölçümü 1)
 $E[S_2] = 3.4 \text{ (dk)}$ (Performans ölçümü 4)
 $E[S] = 2.8 + 3.4 = 6.2 \text{ (dk)}$