EME 3117

SİSTEM SİMÜLASYONU

Simulasyonda İstatistiksel Modeller
(Kesikli Dağılımlar)

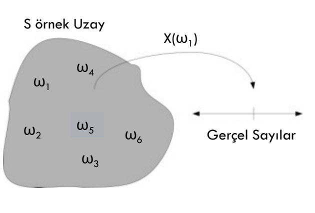
Ders 4

Giriş

Bu derste simulasyon girdilerinin modellenmesinde kullanılan kesikli ve sürekli dağılımlar hatırlatılacaktır.

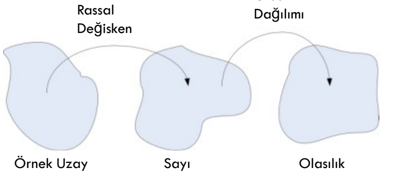
Rassal Degiskenler

Tanım: Rassal Degisken, örnek uzaydaki deney sonuçlarını gerçel bir sayıya atayan bir fonksiyondur.



X: Her ω □ Sye gerçel bir sayı atar.

Olasılık Dağılımı



Kesikli Rasgele Değişkenin Olasılık Fonksiyonu

Tanım: X, sonlu sayıdaki $x_1, x_2, \ldots, x_N$ değerlerini $f(x_i)=P(X=x_i)$, $i=1, 2,\ldots, N$ olasılıkları ile alabilen kesikli rasgele değişken olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan f(x) fonksiyonuna X' in **olasılık fonksiyonu** denir.

$$1.\quad f(x) \geq 0, \quad \text{tüm x'ler için}$$

$$2.\quad \sum_{i=1}^{N} f(x_i) = 1$$

X=x	x_1	x_2	…	x_N
f(x)=P(X=x)	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_N)$

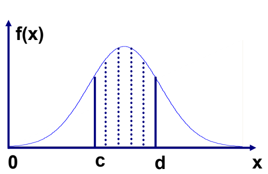
Kesikli Rasgele Değişkenin Dağılım Fonksiyonu

Tanım: (Dağılım fonksiyonu) Bir X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F(x) ile gösterilir ve X' in x' e eşit ya da daha küçük olması olasılığıdır.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Tanım : X, şekilde gösterilen $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanan sürekli rasgele değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan f(x) fonksiyonuna X rasgele değişkeninin **olasılık yoğunluk fonksiyonu** denir.



$$1.\, f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$2.\, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

(f(x) eğrisi altında kalan ve x-ekseni ile sınırlanan alan 1' e eşittir.)

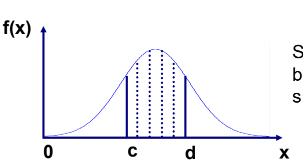
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$$P(c < X < d) = \int_{c}^{d} f(x)dx$$

$f(x)$ egrisi, x-ekseni ve x=c, x=d dogruları ile sınırlı alandır.

$$P(c < X < d) = P(c \leq X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X \leq d)$$

olduğuna dikkat etmeliyiz.



Sürekli X rasgele değişkeninin belli bir x değeri alması olasılığı sıfırdır.

P(X=x)=0

Sürekli Rasgele Değişkenin Dağılım Fonksiyonu

9

Tanım: (Dağılım Fonksiyonu) X, f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rasgele değişken olsun. X' in dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

Rasgele Değişkenlerin Beklenen Değeri ve Varyansı

10

$$E(X) = \sum_{x} x.f(x)$$ X:Kesikli Rassal Degisken

$$V(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y.f(y)dy$$ Y:Sürekli Rassal Degisken

$$\text{V[Y]} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(y - E[Y]\right)^2 f(y)dy$$

Yaygın Kesikli Dağılımlar (1)

11

Dağılım, X rassal Degişkeni	**Olasılık Fonksiyonu f(x)**	**E[X] ve V[X]**
Bernoulli (p) Tek denemedeki basarı sayısı	$f(x) = p^x.(1-p)^{1-x}, \quad x = 0,1$	$\mu = E(X) = p$ $\sigma^2 = p.q = p.(1-p)$
Binom (n,p) n tane Bernoulli denemesindeki basari sayisi	$f(x) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix}.p^x.q^{n-x}$, x=0,1,2,...,n	$\mu = E(X) = np$ $\sigma^2 = npq$
Geometrik (p) Sıralı bernoulli denemelerinde ilk basarıya kadarki deneme sayısı	$f(x) = q^{x-1}.p, \quad x = 1,2,...$	$E(X) = \frac{1}{p}$, $\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$
Negatif Binom (k,p) Sirali Bernoulli denemelerinde k'ninci basariya kadarki deneme sayisi	$f(x) = \begin{pmatrix} x-1 \\ k-1 \end{pmatrix}.p^k.(1-p)^{x-k}$ x=k, k+1,...	$\mu = E(X) = k/p$ $\sigma^2 = kq/p^2$

Yaygın Kesikli Dağılımlar (2)

12

Dağılım, X rassal Degişkeni	**Olasılık Fonksiyonu f(x)**	**E[X] ve V[X]**
Poisson (λ) Belli bir zaman süresince gerçekleşen olayların sayısı	$f(x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$, x=0,1,2,... λ>0	$\mu = E(X) = \lambda$ $\sigma^2 = \lambda$
Kesikli Düzgün (a,b)	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x = a, a+1, ..., b$; a ≤ b	$\mu = E(X) = \frac{(b+a)}{2}$ $\sigma^2 = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$
Kesikli Düzgün	$f(x) = \frac{1}{N}, \quad x = x_1, x_2, ..., x_N$	$\mu = E(X) = \frac{N+1}{2}$ $\sigma^2 = \frac{N^2 - 1}{12}$