YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI-II
Hafta 14

PERT ANALİZİ

Olasılıksal Proje Değerlendirme ve Gözden Geçirme Tekniği

PERT (Probabilistic Evaluation and Review Technique)

Eğer projenin faaliyetlerinin tamamlanma süresi kesin olarak bilinmiyorsa, projelerin verilen bir termin süresi içinde tamamlanıp, tamamlanamayacağının olasılık tahmini için PERT kullanılabilir.

CPM'de projeyi oluşturan faaliyetlerin sürelerinin kesin olarak bilindiği varsayılmakta, ve bunun sonucunda projenin tamamlanabileceği en kısa süre kesin olarak belirlenebilmektedir.

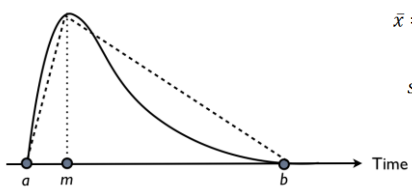
Ancak gerçek yaşam problemlerinde bir projeyi oluşturan faaliyetlerin kesin sürelerini bilmek mümkün değildir, faaliyet süreleri bir olasılık dağılıma sahip Rassal Değişkenlerdir. Bu gibi durumlarda PERT Analizi kullanılır.

Uygulamada proje sorumlusuna faaliyetlerin olasılık dağılımlarını sormak gerçekçi değildir. Bunun yerine her faaliyet için 3 ayrı süre belirlenir:

- **En İyimser Süre (a):** Her şey istenildiği gibi giderse faaliyetin tamamlanacağı en kısa süre. $P(X \geq a)=0.99$
- **En Kötümser Süre (b):** En kötü durumda faaliyetin tamamlanacağı süredi. $P(X \leq b)=0.99$
- **En Yüksek Olasılıklı Süre(olabilir faaliyet süresi) (m):** Geçmiş deneyimlere göre beklenen durumlar altında faaliyetin tamamlanma süresidir.

X: Faaliyetin Tamamlanma Süresi

X ~Beta Dağılımı



$$\bar{x} = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$s^2 = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

$\bar{x}$ (ortalama): bir faaliyetin beklenen gerçekleşme süresi

s^2(varyans): bir faaliyetin süresinin varyansı

Eğer faaliyetlerin varyansı büyük ise bu durumda belirsizlik büyük olur ve faaliyetin o sürede tamamlanması belirsizlik gösterir. Varyansın büyük olduğu durumlarda PERT analizi uygundur.

Eğer faaliyetlerin varyansı küçük ise iyimser ve kötümser süreler birbirinden çok farklı değildir ve bu durumda faaliyet süreleri kesin süreler olarak kabul edilip, CPM uygulanabilir.

PERT analizinde projenin başlangıcından bitimine giden yollardan en yüksek toplam beklenen (ortalama) süreye sahip, yol kritik yoldur. Projenin beklenen tamamlanma süresi, kritik yolun toplan beklenen süresidir.

Her bir faaliyetin süresi aynı ve özdeş dağılmış Beta Rassal Değişkeni olduğu için, krtitik yol üzerindeki faaliyet süresi Rassal Değişkenlerinin toplamı olan proje toplam süresi de rassal değişkendir, ve kritik yol üzerindeki faaliyet sayısı sonsuza gittikçe, projenin toplam tamamlanma süresi Normal Dağılıma yaklaşır (Merkezi Limit Teoremi)

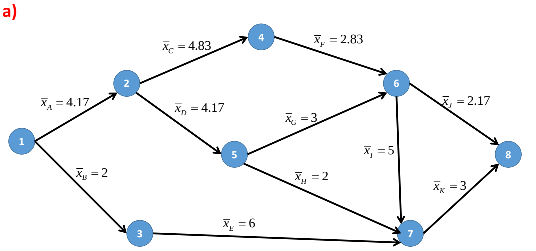
Önceki slayttaki şekilden görüldüğü üzere faaliyet süreleri tek tepe noktalı, normal dağılımdan çok farklılık göstermeyen bir dağılıma sahiptir. Bu nedenle uygulamada kritik yol üzerindeki faaliyet sayısı birkaç adet olsa bile, proje toplam süresinin Normal Dağılıma uyduğu kabul edilebilir.

Örnek: Aşağıda 11 faaliyetten oluşan bir projenin PERT tahmin süreleri verilmiştir.

Faaliyet		a	m	b
1→2	A	3	4	6
1→3	B	1	2	3
2→4	C	3	5	6
2→5	D	3	4	6
3→7	E	5	6	7
4→6	F	1	3	4
5→6	G	1	3	5
5→7	H	1	2	3
6→7	I	3	5	7
6→8	J	1	2	4
7→8	K	2	3	4

a) Projenin şebeke diyagramını çizin.
b) Her bir faaliyetin beklenen (ortalama) süresini ve varyansını hesaplayın.
c) Projenin kritik yolunu bulun.
d) Projenin toplam beklenen tamamlanma süresini ve standart sapmasını yazın.
e) Projenin 19 gün veya daha kısa bir sürede tamamlanma olasılığını hesaplayın.
f) Projenin tamamlanması için bulunan zamanda, projenin tamamlanacağından % 95 olasılıkla emin olunması istendiğinde, projenin bitim süresinin ne olması gerektiğini bulun.

a)

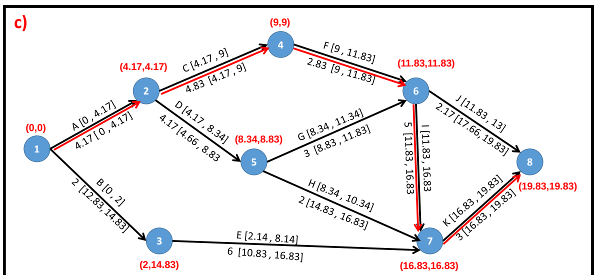


b)

$$\bar{x} = \frac{a + 4m + b}{6} \qquad s^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

Faaliyet		a	m	b	$\overline{X}$ (ortalama)	S^2 varyans
1→2	A	3	4	6	$\frac{3+4.4+6}{6} = 4.17$	$\left(\frac{6-3}{6}\right)^2 = 0.25$
1→3	B	1	2	3	$\frac{1+4.2+3}{6} = 2$	$\left(\frac{3-1}{6}\right)^2 = 0.11$
2→4	C	3	5	6	4.83	0.25
2→5	D	3	4	6	4.17	0.25
3→7	E	5	6	7	6	0.11
4→6	F	1	3	4	2.83	0.25
5→6	G	1	3	5	3	0.44
5→7	H	1	2	3	2	0.11
6→7	I	3	5	7	5	0.44
6→8	J	1	2	4	2.17	0.25
7→8	K	2	3	4	3	0.11

c)



Kritik Yol: 1→2 →4 →6 →7 →8
: A-C-F-I-K

d) Projenin Beklenen Toplam Tamamlanma Süresi, kritik yol üzerindeki faaliyetlerin beklenen (ortalama) sürelerinin toplamıdır.

Kritik Faaliyetler: A-C-F-I-K

T_P : Projenin Tamamlanma Süresi

$$T_P = T_A + T_C + T_F + T_I + T_K$$

$$E\left[T_P\right] = E\left[T_A + T_C + T_F + T_I + T_K\right]$$

$$E\left[T_P\right] = E\left[T_A\right] + E\left[T_C\right] + E\left[T_F\right] + E\left[T_I\right] + E\left[T_K\right] \text{ (Beklenen Değer Özelliği)}$$

$$E[T_P] = \bar{x}_A + \bar{x}_C + \bar{x}_F + \bar{x}_I + \bar{x}_K$$

$$E\left[T_P\right] = 4.17 + 4.83 + 2.83 + 5 + 3 = 19.83 \text{ gün}$$

e) Projenin Toplam Tamamlanma Süresinin varyansı, kritik yol üzerindeki faaliyetlerin varyanslar toplamıdır.

Kritik Faaliyetler: A-C-F-I-K

T_P : Projenin Tamamlanma Süresi

$$T_P = T_A + T_C + T_F + T_I + T_K$$

$$V\left[T_P\right] = V\left[T_A + T_C + T_F + T_I + T_K\right]$$

$$V\left[T_P\right] = V\left[T_A\right] + V\left[T_C\right] + V\left[T_F\right] + V\left[T_I\right] + V\left[T_K\right]$$

(Faaliyet süreleri birbirinden bağımsız olduğu için Varyans özelliğinden)

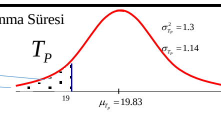
$$V[T_P] = s_A^2 + s_C^2 + s_F^2 + s_I^2 + s_K^2$$

$$V\left[T_P\right] = 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.44 + 0.11 = 1.3 \text{ gün}^2$$

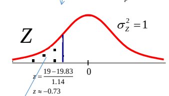
$$\sigma_{T_P} = \sqrt{1.3} = 1.14 \text{ gün}$$

e) T_P : Projenin Tamamlanma Süresi

$P(T_P \le 19) = ?$



$$Z = \frac{T_P - \mu_{T_P}}{\sigma_{T_P}}$$



$P(T_P \le 19) = P(Z \le -0.73)$

Projenin tamamlanma süresinin her ne kadar kritik yol üzerinde faaliyet sayısı az bile olsa MLT gereği Normal Dağılıma Uyduğu kabul edilebilir.

$F_Z(-0.73) = P(Z \le -0.73)$

$P(Z \le -0.73) = 0.232695$

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

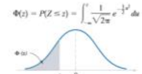


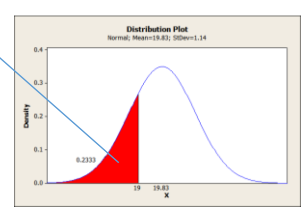
Table II Cumulative Standard Normal Distribution

z	−0.09	−0.08	−0.07	−0.06	−0.05	−0.04	−0.03	−0.02	−0.01	−0.00
−3.9	0.000033	0.000034	0.000036	0.000037	0.000039	0.000041	0.000042	0.000044	0.000046	0.000048
−3.8	0.000050	0.000052	0.000054	0.000057	0.000059	0.000062	0.000064	0.000067	0.000069	0.000072
−3.7	0.000075	0.000078	0.000082	0.000085	0.000088	0.000092	0.000096	0.000100	0.000104	0.000108
−3.6	0.000112	0.000117	0.000121	0.000126	0.000131	0.000136	0.000142	0.000147	0.000153	0.000159
−3.5	0.000165	0.000172	0.000179	0.000185	0.000193	0.000200	0.000208	0.000216	0.000224	0.000233
−1.0	0.137857	0.140071	0.142310	0.144572	0.146859	0.149170	0.151505	0.153864	0.156248	0.158655
−0.9	0.161087	0.163543	0.166023	0.168528	0.171056	0.173609	0.176185	0.178786	0.181411	0.184060
−0.8	0.186733	0.189430	0.192150	0.194894	0.197662	0.200454	0.203269	0.206108	0.208970	0.211855
−0.7	0.214764	0.217695	0.220650	0.223627	0.226627	0.229650	0.232695	0.235762	0.238852	0.241964
−0.6	0.245097	0.248252	0.251429	0.254627	0.257846	0.261086	0.264347	0.267629	0.270931	0.274253
−0.5	0.277595	0.280957	0.284339	0.287740	0.291160	0.294599	0.298056	0.301532	0.305026	0.308538
−0.4	0.312067	0.315614	0.319178	0.322758	0.326355	0.329969	0.333598	0.337243	0.340903	0.344578
−0.3	0.348268	0.351973	0.355691	0.359424	0.363169	0.366928	0.370700	0.374484	0.378281	0.382089
−0.2	0.385908	0.389739	0.393580	0.397432	0.401294	0.405165	0.409046	0.412936	0.416834	0.420740
−0.1	0.424655	0.428576	0.432505	0.436441	0.440382	0.444330	0.448283	0.452242	0.456205	0.460172
0.0	0.464144	0.468119	0.472097	0.476078	0.480061	0.484047	0.488033	0.492022	0.496011	0.500000

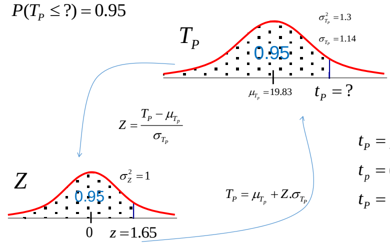
$$T_P \sim Normal\left(\mu = 19.83\ ,\ \sigma^2 = 1.3\right) \qquad \sigma = \sqrt{1.3} = 1.14$$

Minitab

$P(T_P \le 19) \approx 0.23$



f) $P(T_P \le ?) = 0.95$



$t_P = \mu_{T_P} + z.\sigma_{T_P}$

$t_p = (19,83) + (1,65).(1,14)$

$t_P = 21.711$

$P(Z \le z) = 0.95$ ise

$z \approx 1.65$ (tablodan-sonraki slayt)

$P(Z \le z) = 0.95$ ise

$z \approx 1.65$

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

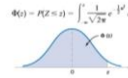


Table II Cumulative Standard Normal Distribution (continued)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.532922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555760	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.621719	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802338	0.805106	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823815	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.878999	0.881000	0.882977
1.2	0.884930	0.886860	0.888767	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.903199	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935744	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959071	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.8	0.964070	0.964852	0.965621	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621

$P(T_p \le ?) = 0.95$

$T_p \sim Normal\left(\mu = 19.83\ ,\ \sigma^2 = 1.3\right)$ $\quad \sigma = \sqrt{1.3} = 1.14$

Minitab

$P(T_p \le 21.71) = 0.95$