Ders 29

Metindeki ilgili bölümler §3.9

Spin korelasyonları ve kuantum tuhaflık : Spin 1/2 sistemleri

Bir spin tekli durumunda yaratılmış bir çift spin 1/2 parçacık düşünün. (Deneysel olarak konuşursak, bu bir takım yollarla yapılabilir; kitabınıza bakın.) Bundan dolayı, sistemin durumu

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$$

durum vektörü tarafından tanımlanır. Parçacıkların – rahatsız edilmemiş ve etkileşmeyerek – ilerlediğini farz edelim ta ki bunlar iyi ayrılmış olsun. 1. Parçacık, 1. Gözlemci tarafından ölçülmüş bir spin bileşenine ve 2. Parçacık da 2. Gözlemci tarafından ölçülmüş bir spin bileşenine sahiptir. Başlangıç olarak, her iki gözlemcinin de z ekseni yönündeki spini ölçtüğünü varsayın. Eğer 1. gözlemci spin yukarı görürse, 2. gözlemci ne görür? Belki doğru şekilde tahmin edeceksinizdir : spin aşağı. Fakat bunu ispat edebilir misiniz? Pekala, bu sonucun sebebi sistemin durumunun $\mathbf{S}_z$'nin sıfır özdeğerli bir özvektörü olmasıdır. Bu nedenle, bu iki parçacığın spinlerinin z bileşenlerinin kesinlikle zıt değerlere sahip olacağı biliniyor. Alternatif olarak, $|\psi\rangle$'ın çarpım bazında açılımından bulunan (eşit olasılıklı) durumların yalnızca zıt spinli durumlar olduğunu görebilirsiniz. Bunun sistemli bir şekilde nasıl ispatlanacağını görelim; bu iyi bir alıştırmadır.

Sorumuzu takip eden basit sorular dizisi şeklinde sorabiliriz. 1. gözlemcinin spin yukarı bulma olasılığı $P(S_{1z} = \frac{\hbar}{2})$ nedir? Bu kolaydır :*

$$P(S_{1z} = \frac{\hbar}{2}) = |\langle + + |\psi\rangle|^2 + |\langle + - |\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Tabii ki, 1. parçacığın, 2. parçacığa kıyasla herhangi bir farklı özelliği yoktur; aynı sonuç 2. parçacık içinde geçerlidir. 1. parçacığı spin yukarı ve 2. parçacığı spin aşağı olarak bulma olasılığı nedir?

$$P(S_{1z} = \frac{\hbar}{2}, S_{2z} = -\frac{\hbar}{2}) = |\langle + - |\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

elde ederiz. 1. parçacık – tekli durumda – z yönünde spin yukarı olarak belirlendiğinde bunu takiben 2. parçacığın z yönünde spin aşağı olacağı kesindir. 1. ve 2. parçacıkların S_z değişkenlerinin

*Pekala, eğer $|\psi\rangle$ durumunda A işlemcisinin bir a özdeğerini bulma olasılığının

$$P(a) = \sum_{i=1}^{d} |\langle i|\psi\rangle|^2$$

olduğunu farkederseniz (alıştırma), bu "kolay"dır. Burada $|i\rangle$, a özdeğerli özvektörlerin d boyutlu altuzayının bazıdır :

$$A|i\rangle = a|i\rangle, \qquad i = 1, 2, \ldots, d.$$

"tam korelasyonlu" olduğunu söyleriz. Bunu ifade etmenin bir başka yolu şudur. Eğer – tekli durumda – 1. parçacık z yönünde spin yukarı olarak belirlenirse, bundan sonraki tüm ölçüm amaçları için sistemin durum vektörü $|+-\rangle$ ile verilir. 2. parçacığa ait spininin takip eden bir z bileşeni ölçümü kesinlikle spin aşağı verecektir. Yukarıda bahsi geçen tartışmamız herhangi bir eksen için de doğrudur, yani, spinin herhangi bir bileşeni (herbir gözlemci tarafından ölçülen aynı bileşeni) için geçerlidir.

Bu deneyi birçok kez tekrar ettiğimizi düşünüyoruz. Eğer sadece tek bir gözlemci S_z'yi ölçerse yüzde 50-50 olasıkla spin aşağı ve spin yukarı sonuçların rastgele bir dizisini görür. Kuantum mekaniği, yapabileceğiniz en iyi şeyin bu olduğunu söyler – herbir parçacık için S_z değerini kesinlik derecesinde tahmin edemezsiniz, çünkü bireysel parçacık spini, sistemin toplam spininin büyüklüğü, ki kesinlikle bilinen budur, ile uyuşumlu değildir. (Tekli) durum belirtildi ve sistem hakkında daha fazla sahip olunan bilgi yok. Parçacıklar birbirlerinden istendiği kadar büyük mesafelerle ayrılabilecekleri halde, S_z bileşenlerinde mükemmel bir korelasyona sahip olmak zorunda olduklarını nasıl "biliyor"lar? EPR şöyle demeyi tercih ederdi : herbir parçacık yaratıldıkları anda belirli bir S_z değerine *aslında* sahiptir, ve değerler yukarıda bahsedildiği gibi korelasyonludur, daha en başta kuantum mekaniğidir herbir parçacığın S_z değerini tahmin edemeyen ve bunlara rastgele bir olasılık dağılımı tahsis eden.

EPR devam eder ve kuantum mekaniğinin nihai açıklama olması halinde bir paradoksun ortaya çıktığını öne sürer. Bunu görmek için, şu şekilde mantık yürütün. Eğer her iki gözlemci de ölçüm yapıyorsa, 1. ve 2. gözlemciler yüzde 50-50 olasılıkla spin aşağı ve spin yukarı sonuçların rastgele bir dağılımını görürler. Fakat verilerini karşılaştırdıklarında 1. gözlemcinin her spin yukarı sonucuna 2. gözlemcinin bir spin aşağı sonucu ile ya da tam tersi şekilde eşleştiğini görürler. Böylece, bu özel vaziyette, 2. parçacığın herbir deneysel tekrarda belirli bir S_z değerine sahip olduğu söylenebilir. (Elbette z ekseninin seçilmiş olası tamamen rastgeledir.) Şimdi, 1. gözlemcinin S_z yerine S_x'i ölçtüğünü varsayın. 1. gözlemci x yönünde spin yukarı/aşağı bulduğunda sistemin durumu (alıştırma) $|S_{1x} = \pm\hbar/2; S_{2x} = \mp\hbar/2\rangle$ olur ve 2. gözlemcinin S_z ölçümü şimdi yüzde 50-50 olasılıkla spin yukarı ve spin aşağı verecektir. Bunu görmek için, her iki $|S_{1x} = \pm\hbar/2; S_{2x} = \mp\hbar/2\rangle$ durumunda da $S_{2z} = \hbar/2$ bulma olasılığı $P(S_{2z} = \hbar/2)$ şöyle hesaplanabilir,

$$
\begin{aligned}
P(S_{2z} = \hbar/2) &= |\langle S_{1x} = \hbar/2; S_{2z} = \hbar/2 | S_{1x} = \pm\hbar/2; S_{2x} = \mp\hbar/2\rangle|^2 \\
&\quad + |\langle S_{1x} = -\hbar/2; S_{2z} = \hbar/2 | S_{1x} = \pm\hbar/2; S_{2x} = \mp\hbar/2\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Açıkça, bu halde 2. parçacık S_z için belirli bir değere sahip değil, yüzde 50-50 bir olasılık dağılımına sahiptir. Diğer taraftan, eğer ikinci gözlemci S_x'i ölçmeyi seçseydi sonuç kesinlikle 1. gözlemcinin ölçüm sonucunun tam tersi olacaktı. Başka bir deyişle, 1. gözlemci S_x'i ölçtüğünde, 2. parçacık S_z için değil ama S_x için belirli bir değere sahip oluyor olarak görülebilir.

Başka bir yolla söyleyebiliriz : (i) Bir spin bileşeninin ölçümü rastgele (50-50) değerler verir. (ii) 1. gözlemci S_z'yi ölçtüğünde 2. gözlemcinin S_z değeri 1. gözlemcinin ölçümüyle tam korelasyonludur. (iii) 1. gözlemci S_x'i ölçerse, 2. gözlemcinin S_z değerleri rastgeledir – 1. gözlemcinin sonuçları ile korelasyonsuzdur.

Bu tartışmadan – kuantum mekaniğinin ortaya koyduğu açıklamaya göre – 2. parçacığın "gerçeklik"inin, 1. gözlemcinin ölçümünü nasıl yaptığına bağlı olduğu açıktır. Kimse spin gözlenebilirlerinin ölçümden bağımsız olarak herbir parçacığın gerçekliğinin bir parçası olduğunu ileri süremez. Bu "yerellik" kabulü ile çelişiyor, yani, uygun biçimde birbirinden ayrılmış parçacıklar için, biri üzerinde yapılan deney diğerini etkilemez.

Bir önceki, eninde sonunda gözlenebilirlerin uyuşumsuzluğundan kaynaklanan, oldukça alelade bir kuantum mekaniksel sonuçtur. Fakat, EPR'ın yerellik prensibi ile tutarlı değildir, ki bu 2. parçacığın gözlenebilir özelliklerinin iki parçacığın istenilen bir mesafe kadar ayrılabildiğinde 1. parçacığınkilere bağlı olmasını yasaklar. Dolayısıyla "EPR paradoksu"na ulaşırız. EPR tek çıkış yolunun herbir parçacığın spin bileşeninin aslında, durum hazırlama süreci tarafından belirlenen, iyi tanımlı olduğunu ve öngörülerinde beraberinde gelen bir parça yerel olmama içeren kuantum mekaniğinin eksik bir teori olduğunu varsaymaktır.

Bununla birlikte, aslında deneyler, kuantum mekaniğinin gerçekten yukarıda tarif edildiği bakımdan yerel olmayan şekilde görülmesini destekledi. Aşağıda, bu iddiayı destekleyen analizin genel hatlarını çizeceğiz.

Bell'in teoremi

Burada Bell'in, EPR sonucunun peşini bırakmayıp bunu araştırma girişimini kısaca tarif ediyoruz. Bütün spin bileşenlerinin aslında kesinlikle belirlendiği ve bunların "yerel" olarak var olduğu EPR önerisine dayanan belirli bir tahmin (korelasyon fonksiyonlarının sağladığı bir eşitlik) türeteceğiz. Bunun üzerine, bu tahminin kuantum mekaniksel tahminle uyuşmadığını göstereceğiz. En sonunda, deneysel sonuçların kuantum mekaniksel tahmini desteklediğini ortaya koyacağız.

İki parçacığın da yaratıldığında tüm spin bileşenlerinin aslında kesin tanımlı olduğunu ve bir parçacığın spin bileşeni değerlerinin diğer parçacık üzerinde yapılan deneyden etkilenmeyeceğini varsayın. 1. ve 2. gözlemcinin rastgele seçilen $\hat{n}_1$ ve $\hat{n}_2$ eksenleri yönünde yaptıkları spin bileşeni ölçümlerinin sonuçları arasındaki bağıntıyı göz önüne alalım. Ölçümlerin sonuçlarını $\hbar/2$ biriminde rapor ediyor ve 1. gözlemcinin sonucunun bir $A(\hat{n}_1, \lambda) = \pm 1$ fonksiyonuyla ve 2. gözlemcinin sonucunun bir $B(\hat{n}_1, \lambda) = \pm 1$ fonksiyonuyla verildiğini farz ediyoruz, burada, λ sonucu benzersizce belirlemek için gereken herhangi bir ("gizli") değişken kümesidir.*

* A, $\hat{n}_2$'ye bağlı değilken ve B, $\hat{n}_1$'e bağlı değilken yerellik kabulü kullanılıyor.

Tabii ki, kuantum mekaniğinin λ'ya erişimi yoktur, fakat EPR fikri doğruysa herbir parçacığın yaratıldığında spin bileşenlerini belirleyen bir değişkenler kümesi olmalıdır. Bu değişkenler, genel olarak, bir yaratmadan diğerine değişecektir; herşeyden önce herbir spin bileşeninin mümkün olan iki değer arasında yüzde 50-50 olasılıkla dalgalandığının gözlendiğini biliyoruz. Birçok deneyler arasında değişen bu λ'yı çok genel bir yolla niteleyeceğiz : bir $\rho(\lambda)$ olasılık yoğunluğu kullanarak (ki bunun özel formunun bu tartışmamızın amacıyla bir ilgisi yok). Böylece, örneğin, birçok deneysel ölçüm sonrasında $A(\hat{n}, \lambda)$'nın ortalama değeri

$$\langle A(\hat{n}) \rangle = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\hat{n}, \lambda)$$

olur. Bundan sonra, iki gözlemcinin detektörlerinin her ikisi de aynı yöne ayarlandığında ($\hat{n}_1 = \hat{n}_2$) A ve B'nin değerleri için – kesinlikle – eşit ve ters değerler elde edeceğimiz gerçeğini işe katıyoruz :

$$A(\hat{n}, \lambda) = -B(\hat{n}, \lambda)$$

İlk olarak, birçok deneysel tekrardan sonra iki ölçümün çarpımının ortalaması üzerine odaklanıyoruz :

$$\begin{aligned} \langle A(\hat{n}_1) B(\hat{n}_2) \rangle &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\hat{n}_1, \lambda) B(\hat{n}_2, \lambda) \\ &= -\int d\lambda \rho(\lambda) A(\hat{n}_1, \lambda) A(\hat{n}_2, \lambda) \end{aligned}$$

Bunun, esasında iki spin ölçümünün korelasyon fonksiyonu olduğunu fark edin.

Bundan sonra, bir parçacığın spin ölçümünü sadece bir yönde düşünürken diğerinin ölçülen spin yönünü değiştirdiğimizde bu "alışılmamış" davranışın ortaya çıktığını hatırlayın. Bu nedenle, bir başka $\hat{n}_3$ yönünü olaya dahil ederek

$$\langle A(\hat{n}_1) B(\hat{n}_2) \rangle - \langle A(\hat{n}_1) B(\hat{n}_3) \rangle = -\int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\hat{n}_2, \lambda) A(\hat{n}_3, \lambda)] A(\hat{n}_1, \lambda) A(\hat{n}_2, \lambda)$$

elde ederiz (alıştırma), burada ($\hbar/2$ biriminde ölçtüğümüz için)

$$[A(\hat{n}, \lambda)]^2 = 1$$

gerçeğini kullandık. Şimdi, tahmini oluşturmak kolay (alıştırma) :

$$|\langle A(\hat{n}_1) B(\hat{n}_2) \rangle - \langle A(\hat{n}_1) B(\hat{n}_3) \rangle| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\hat{n}_2, \lambda) A(\hat{n}_3, \lambda)]$$

Bu tahmini herhangi bir $f(\lambda)$ fonksiyonu için

$$|\int d\lambda f(\lambda)| \leq \int d\lambda |f(\lambda)|$$

olduğunun gözleyerek ispatlayabilirisiniz. Bundan sonra,

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1,$$

kullanarak

$$|\langle A(\hat{n}_1)B(\hat{n}_2)\rangle - \langle A(\hat{n}_1)B(\hat{n}_3)\rangle| \leq 1 + \langle A(\hat{n}_2)B(\hat{n}_3)\rangle$$

elde ederiz.

Bu, *Bell eşitsizliği*'nin bir çeşididir. Bu çok geniş bir yelpazede, tüm gözlenebilirlerin uyuşumlu olduğu "yerel, gizli değişken" teorileri için geçerlidir. Şimdi, kuantum mekaniğinin, tabii ki, bu eşitsizliği ihlal ettiğini böylece, etkisi itibariyle, deneysel olarak kuantum mekaniğinin tastamam olup olmadığının belirlenebileceğini göstereceğiz.