Ders 27

Metindeki ilgili bölümler §3.6, 3.7

Genel olarak açısal momentum toplamı

Bir önceki 2 spin 1/2 sistemine ait tartışmamızı aşağıdaki gibi genelleyebiliriz. Bize iki açısal momentum, $\vec{J}_1$ ve $\vec{J}_2$'nin (örneğin, iki spin, veya bir spin ve bir orbital açısal momentum, veya bir çift orbital açısal momentum) verildiğini düşünün. İki açısal momentumu birlikte, daha önceki gibi direkt çarpım uzayını kullanarak bir $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ çarpım bazıyla irdeleyebiliriz. Bu operatörleri çarpım vektörleri üzerinde

$$\vec{J}_1(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = (\vec{J}|\alpha\rangle) \otimes |\beta\rangle,$$

ve

$$\vec{J}_2(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = |\alpha\rangle \otimes (\vec{J}|\beta\rangle),$$

şeklinde temsil eder ve doğrusallık ile genel vektörlere genişletiriz. $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ çarpım bazı, $(J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z})$ ile sağlanan sıradeğişmeli gözlenebilire karşılık gelen bazdır.

Toplam açısal momentum

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

tarafından tanımlanır. Toplam açısal momentumu içeren bir sıradeğişmeli gözlenebilirler kümesi (J_1^2, J_2^2, J^2, J_z) operatörleri ile sağlanır. Her iki bazın da, tek ve toplam açısal momentumun tüm bileşenleri ile değişme özelliği gösteren J_1^2 ve J_2^2'nin özvektörleri olduğunu dikkate alın (alıştırma). Ayrıca, $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ çarpım vektörlerinin aslında J_z'nin, $m = m_1 + m_2$ ile verilen özdeğerli, özvektörleri olduğunu not ediyoruz, çünkü

$$J_z|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = (J_{1z} + J_{2z})|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = (m_1 + m_2)\hbar|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

Fakat, toplam açısal momentum vektörlerini – J^2'nin özvektörlerinin – elde etmek için çarpım bazı vektörlerinin doğrusal kombinasyonunu almak zorunda kalacağız.

Toplam açısal momentum bazı $|j_1, j_2, j, m\rangle$ ile gösterilir. Verilen j_1 ve j_2 değerleri için,

$$j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \ldots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2$$

ile herzamanki gibi

$$m = -j, -j + 1, \ldots, j - 1, j$$

olduğu gösterilebilir (ders kitabınıza bakın). Herbiri kendi baz çeşidini tanımlayan bu iki gözlenebilirler kümesi birbiriyle tam olarak uyuşumlu değildir. Özellikle, J_{1z} ve J_{2z}, J^2 ile sıradeğişmeli değildir. Bundan dolayı, toplam açısal momentum özvektörlerinin kümesi bireysel açısal momentum özvektörlerinden farklı olacaktır. $|j_1, j_2, j, m\rangle$ toplam açısal momentum özvektörleri, üstüste gelmenin çeşitli m_1, m_2 değerleri üzerinden gideceği, $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$'lerin doğrusal kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Kuşkusuz ki, $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$'ler de, süpersozisyonun çeşitli j, m değerleri üzerinden olacağı $|j_1, j_2, j, m\rangle$ cinsinden açılabilir. Bu üstüste gelişlerdeki katsayılar *Clebsch-Gordan katsayıları* olarak bilinir. bütün bunların çok basit bir örneğini bir çift spin 1/2 sistemi olayında çalıştık. Clebsch-Gordan katsayılarının, keşfetmek için zamanımız olmayan, genel bir teorisi vardır. Bunun yerine nispeten kolay ve oldukça önemli bir başka örneği kısaca göreceğiz.

Örnek : 3-d'de bir spin 1/2 parçacık

Şimdi, 3-d'de hareket eden ve spini 1/2 olan bir parçacığın açısal momentumunu tasvir eden bazı formülleri elde etmek için bu fikirleri uygulayacağız. Tabii ki, bu relativistik olmayan bir eletkronun bir modelidir, dolayısla son derece önemlidir.

Başlangıç olarak, durumların Hilbert uzayını belirtiyoruz. Tensör çarpım inşasını kullanarak, onu,

$$|\vec{x}, \pm\rangle = |\vec{x}\rangle \otimes |S_z, \pm\rangle$$

çarpım bazının formal doğrusal kombinasyonunun uzayı olarak görebiliriz. Genel bir durum

$$|\psi\rangle = \int d^3x (a_+(\vec{x})|\vec{x}, +\rangle + a_-(\vec{x})|\vec{x}, -\rangle)$$

formundadır. Herzamanki gibi, $|a_\pm(\vec{x})|^2$ parçacığın $\vec{x}$'de z ekseni yönünde spin yukarı/aşağı bulunma olasılık yoğunluğudur. Normalizasyon şartının

$$\int d^3x \left(|a_+|^2 + |a_-|^2\right) = 1$$

olduğuna dikkat edin. Alternatif olarak, durumu, yukarıda tanımlanan bazdaki bileşenleri cinsinden niteleyebiliriz. Bu halde, bilgiyi, elemanları kompleks değerli fonksiyonlar olan 2-bileşenli sütun vektörü içine düzenleriz. Bu şey bir *spinör alanı* olarak bilinir :

$$\begin{pmatrix} \langle\vec{x}, +|\psi\rangle \\ \langle\vec{x}, -|\psi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+(\vec{x}) \\ a_-(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Konum, momentum ve spin operatörleri bu çarpım bazında şöyle tanımlanır :

$$\vec{X}(|\vec{x} \otimes |S_z.\pm\rangle) = \vec{x}|\vec{x}, \pm\rangle, \qquad \vec{P}(|\vec{x} \otimes |S_z.\pm\rangle) = (\vec{P}|\vec{x}, \pm\rangle) \otimes |S_z, \pm\rangle$$
$$\vec{S}(|\vec{x}\rangle \otimes |S_z, \pm\rangle) = |\vec{x} \otimes (\vec{S}|S_z, \pm\rangle)$$

Bu, spinör alanlarında konum ve momentum operatörlerinin herbir bileşen fonksiyon üzerinde herzamanki ($\vec{X}$ çarpılır, $\vec{P}$ türev alır) etkisini gerçekleştirirken spin operatörlerinin 2×2 matrisler yoluyla herzamanki işlevini yerine getirdiğine işaret eder. Örneğin, orbital açısal momentum $\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$'dir ve

$$\vec{X} \times \vec{P} \begin{pmatrix} a_+(\vec{x}) \\ a_-(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{i}\vec{x} \times \nabla a_+(\vec{x}) \\ \frac{\hbar}{i}\vec{x} \times \nabla a_-(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

biçiminde etkir, ve

$$S_x \begin{pmatrix} a_+(\vec{x}) \\ a_-(\vec{x}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} a_-(\vec{x}) \\ a_+(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Şimdi, sistemin toplam açısal momentumunu

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

operatörü olarak tanımlayabiliriz. Herzamanki gibi, $\vec{L}$ ve $\vec{S}$ sıradeğişmeli olduğundan ve açısal momentum sıradeğişimi bağıntılarını sağladığından

$$[J_a, J_b] = i\hbar\epsilon_{abc}J_c$$

elde ederiz. Dolayısyla, toplam açısal momentum daha önce çıkardığımız genel özelliklerin tümüne sahiptir. Örneğin, $\vec{J}$ sistemin bütününün dönüşlerini üretirken, $\vec{L}$ sadece konum ve momentumun dönüşlerini üretir ve $\vec{S}$ de yalnızca spinin dönüşlerini üretir. Biz, ancak L^2, S^2, J^2 ve bir bileşeni, mesela J_z'i eşzamanlı olarak köşegenleştirebiliriz. $\vec{J_1} = \vec{L}$ ve $\vec{J_2} = \vec{S}$ şeklinde ayarlayarak $j_1 = l = 0, 1, 2, \ldots$ ve $j_2 = s = \frac{1}{2}$ elde ederiz. $|l, s = 1/2, j, m\rangle$ ile belirtilen bir durum için, j'nin mümkün olan değerleri için

$$j = l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}$$

elde ederiz.

Toplam açısal momentum özvektörleri, orijinal çarpım özvektörlerine (L_z ve S_z'nin özvektörlerine) nasıl bağlıdır? Bu kuruluşun taslağını çizeceğiz. En yüksek açısal momentum değerli toplam açısal momentum özvektörleri ile başlayın :

$$|j_1 = l, j_2 = \frac{1}{2}, j = l + \frac{1}{2}, m = l + \frac{1}{2}\rangle$$

j_1 ve j_2 verildiğinde J_z için uygun özdeğere sahip yalnızca tek bir (doğrusal bağımsız) çarpım özvektörü vardır, yani,

$$|j_1 = l, j_2 = \frac{1}{2}, m_1 = l, m_2 = \frac{1}{2}\rangle$$

böylece

$$|j_1 = l, j_2 = \frac{1}{2}, j = l + \frac{1}{2}, m = l + \frac{1}{2}\rangle = |j_1 = l, j_2 = \frac{1}{2}, m_1 = l, m_2 = \frac{1}{2}\rangle$$

elde ederiz. J_z'nin daha düşük özdeğerlerini elde etmek için,

$$J_- = L_- + S_-$$

merdiven operatörünüi bu ket'e uygulayabilir ve boylandırabiliriz. Ayrıntılar, kitapta bulunabilir. Benzer şekilde, $j = l - \frac{1}{2}$ ve $m = -l + \frac{1}{2}$ en düşük değerlerinden başlar ve yükseltme operatörünü kullanarak diğer m değerli durumları kurabiliriz. Bu yolla, bütün toplam açısal momentum özvektörlerini, çarpım özvektörleri cinsinden ifade edebiliriz. Sonuç çok çetrefilli değildir. $j = l \pm \frac{1}{2}$ için

$$|j_1 = l, j_2 = \frac{1}{2}, j = l \pm \frac{1}{2}, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left[\pm\sqrt{l \pm m + \frac{1}{2}} |l, m - \frac{1}{2}\rangle \otimes |+\rangle + \sqrt{l \mp m + \frac{1}{2}} |l, m + \frac{1}{2}\rangle \otimes |-\rangle \right]$$

buluruz. Spinör alanları cinsinden, bileşenleri çarpım bazında alarak toplam açısal momentum özvektörlerini temsil eden $\mathbf{Y}_{j,m}(\theta, \phi)$ *toplam açısal momentum spinörleri*ni elde ederiz :

$$\mathbf{Y}_{j,m} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{l \pm m + \frac{1}{2}} Y^l_{m_l = m - \frac{1}{2}}(\theta, \phi) \\ \sqrt{l \mp m + \frac{1}{2}} Y^l_{m_l = m + \frac{1}{2}}(\theta, \phi) \end{pmatrix}$$

Toplam açısal momentumun kesinlikle $j = l \pm \frac{1}{2}$ ve m ile belirtilen değerleri aldığı bilindiğinde, bu sütun vektörünün yukarıdaki (aşağıdaki) bileşeni bir parçacığın çeşitli açısal konumlarda ve z yönünde spin yukarı (aşağı) bulunma olasılık yoğunluğunu belirler.