Ders 26

Metindeki ilgili bölümler §3.6, 3.7

İki spin 1/2 sistem : gözlenebilirler

İki spin 1/2 parçacık içeren bir sisteme ait durumların 4-d Hilbert uzayını inşa ettik. Uzayı, herbir parçacığın z yönündeki spinini kesin olarak bilmeye karşılık gelen "çarpım durumları"ndan kurduk. Oysa ki, genel durumlar, bunların çarpımları olmasından ziyade üstüste gelişleri oluyordu. Gözlemlenebilirler bu uzayda Hermityen olan operatörlerle nasıl temsil edilecek? Başlangıç olarak, herbir parçacık için spin gözlenebilirlerini düşünelim. Bunları $\vec{S}_i = (\vec{S}_1, \vec{S}_2)$ olarak adlandırın. Bunları çarpım durumları üzerinde

$$\vec{S}_1(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = (\vec{S}|\alpha\rangle) \otimes |\beta\rangle$$

ve

$$\vec{S}_2(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = (|\alpha\rangle) \otimes \vec{S}|\beta\rangle$$

yoluyla tanımlarız. Burada, $\vec{S}$ operatörleri, (iki boyutlu Hilbert uzayında etkiyen) biraz ayrıntılı işlediğimiz bilindik spin 1/2 operatörleridir

Eğer $|\alpha\rangle$ bir eksen yönündeki spinin bir özvektörü ise $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$'da herhangi bir $|\beta\rangle$ için öyledir. Bu, birinci parçacığın seçilen eksen yönündeki spin bileşenini kesinlikle biliyorsak $\vec{S}_1$'in bu bileşeninin bir özvektörünü, olması gerektiği gibi, elde edeceğimiz anlamına gelir. Aynı açıklamalar 2. parçacığa da uyarlanabilir. $\vec{S}_1$ ve $\vec{S}_2$'nin genel vektörler üzerindeki etkisi, yukarıda göz önüne aldığımız gibi, bu vektörleri çarpım bazında açmak ve bu açılımda operatörü terim terim her bir vektör üzerinde değerlendirmek için doğrusallığı kullanmak suretiyle tanımlanır. Bazen, yukarıdaki tanımı özetlemek için

$$\vec{S}_1 = \vec{S} \otimes I, \qquad \vec{S}_2 = I \otimes \vec{S}$$

yazılır. Bu $\vec{S}_1$ ve $\vec{S}_2$ spin operatörleri değişmelidir (alıştırma) ve bunların 1-parçacık karşılıkları ile aynı özdeğerlere sahiptirler (alıştırma). Bu yolla, şimdi altsistem olarak görülen herbir parçacığın olağan özelliklerini tekrar kazanırız.

Toplam açısal momentum

İki parçacıklı sistemin bütünü için tanımlanabilecek başka gözlenebilirler de vardır. *Toplam* açısal momentum $\vec{\mathbf{S}}$'i düşünün, ki,

$$\vec{\mathbf{S}} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

ile tanımlanır. Bu operatörün Hermityen olduğunu ve

$$[\mathbf{S}_k, \mathbf{S}_l] = i\hbar\epsilon_{klm}\mathbf{S}_m$$

sağladığını kolayca kontrol edebilirsiniz, böylelikle açısal momentumu temsil eder. Gerçekten de, iki parçacıklı bu sistemin bütünü için dönüşler üretir. Bireysel $\vec{S}_1$ ve $\vec{S}_2$ spin operatörleri yalnızca kendi ilgili oldukları altsistemlerde dönüşler üretirler.

Genel açısal momentum teorimizi kullanarak, $\mathbf{S}^2$ ve herhangi bir bileşeninin, mesela $\mathbf{S}_z$, ortak özvektörlerinin bir bazını bulabileceğimizi biliyoruz. Bunları $|s, m_s\rangle$ olarak yazalım, burada

$$\mathbf{S}^2|s, m_s\rangle = s(s+1)\hbar^2|s, m_s\rangle, \qquad \mathbf{S}_z|s, m_s\rangle = m\hbar|s, m_s\rangle.$$

Şimdi

$$|\pm, \pm\rangle = |S_z, \pm\rangle \otimes |S_z, \pm\rangle$$

tanımlayalım. Bu çarpım baz fiziksel olarak herbir parçacığın z spin bileşeninin kesinlikle bilindiği durumlara karşılık gelir. Aşağıda, toplam açısal momentum özdeğerlerini bulacağız ve özvektörleri, $|\pm, \pm\rangle$ çarpım bazında ifade edeceğiz.

Başlangıç olarak, $\mathbf{S}_z$'nin özvektörlerinin aslında çarpım vektörlerinin bazı olduğu çok açıktır, çünkü ($m_1 = \pm\frac{1}{2}$, $m_2 = \pm\frac{1}{2}$ ile)

$$\mathbf{S}_z|m_1, m_2\rangle = (S_{1z} + S_{2z})|m_1, m_2\rangle = (m_1 + m_2)\hbar|m_1, m_2\rangle.$$

$m = -1, 0, 1$ ile $m = 0$'ın çift katlı dejenere olduğunu görüyoruz (alıştırma). Açısal momentum üzerine olan genel sonuçlarımızdan, toplam spin kuantum sayısı için sadece $s = 0, 1$ değerlerinin olası olduğu açıktır. Buradan, $m = \pm$ özvektörlerinin $\mathbf{S}^2$'nin $s = 1$ değerli özvektörleri olduğunu çıkarabiliriz, fakat $\mathbf{S}^2$'nin özvektörlerini elde etmek için $m = 0$ çarpım özvektörlerinin doğrusal kombinasyonlarına ihtiyaç duyabiliriz. $|{+}{+}\rangle$ ve $|{-}{-}\rangle$ özvektörlerinin neden aynı zamanda $\mathbf{S}^2$'nin de özvektörleri olması gerektiğini görmek için şu şekilde mantık yürütülür. Genel teorimiz bize, $\mathbf{S}^2$ ve $\mathbf{S}_z$'nin eşzamanlı özvektörlerinin varlığını garanti eder. (Normalizasyon farkına kadar) $m = \pm 1$ değerli yegane vektörlerin, $|++\rangle$ ve $|--\rangle$ vektörlerinin olduğu kolayca görülmektedir, çünkü herhangi başka vektörler çarpım bazında açılabilir ve bu da herhangi başka doğrusal kombinasyonu derhal elemiş olur (alıştırma). Bundan dolayı, bu iki vektör $\mathbf{S}^2$'nin özvektörleri olmalıdır. Bunlar $m = \pm 1$'e sahip olduğundan ve $s = 0, 1$ olduğunu bildiğimiz için $|++\rangle$ ve $|--\rangle$ vektörlerinin $\mathbf{S}^2$'nin $s = 1$ özdeğerli özvektörleri olduğu ortaya çıkar.

$\mathbf{S}^2$'nin özvektörlerini ürün veren $m = 0$'lı $|+-\rangle$ ve $|-+\rangle$ çarpım vektörlerinin doğrusal kombinasyonlarını belirlemek için açısal momentum merdiven operatörlerini kullanırız :

$$\mathbf{S}_\pm = S_x \pm iS_y = S_{1\pm} + S_{2\pm}$$

Eğer $\mathbf{S}_-$'yi

$$|s = 1, m = 1\rangle = |++\rangle,$$

özvektörüne uygularsak

$$|s = 1, m = 0\rangle = \mathbf{S}_-|s = 1, m = 1\rangle = \mathbf{S}_-|++\rangle = (S_{1-} + S_{2-})|++\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle + |+-\rangle),$$

elde ederiz (alıştırma). Geriye kalan $|0,0\rangle$ özketi bu vektöre olduğu kadar diğer $|++\rangle$ ve $|--\rangle$ özketlerine de ortogonal olmalıdır, buradan onun formülü çıkarılır (alıştırma). Hepsi birarada, $|s,m\rangle$ *toplam* açısal momentum özvektörlerini *tekil* açısal momentum (çarpım) özketlerine bağlı olarak buluruz :

$$
\begin{aligned}
|1,1\rangle &= |++\rangle \\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle \\
|1,-1\rangle &= |--\rangle \\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle
\end{aligned}
$$

Bu vektörler Hilbert uzayı için bir ortonormal baz oluşturur, böylece bunların hepsi $\mathbf{S}^2$ ve $\mathbf{S}_z$'nin doğrusal bağımsız özvektörleridir. $s=1$ olan özdurumlar *üçlü* durumlar ve $s=0$ olan özdurum *tekli* durum olarak adlandırılır. Yarım tamsayılı açısal momentumu olan iki sistemi birleştirerek yalnızca tamsayılara izin veren bir sisteme ulaştığımızı not edin.

$|s,m_s\rangle$ özvektörlerinin daha uzun – fakat daha dolambaçsız – türetimi, basitçe $\mathbf{S}^2$ için $|\pm\pm\rangle$ çarpım vektörleri bazında 4×4 matris yazıp bunun özdeğer problemini çözerek meydana gelir. Bu iyi bir alıştırmadır. Matris elemanlarını elde etmek için

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}_z^2 + \hbar\mathbf{S}_z + \mathbf{S}_+\mathbf{S}_-$$

formülünü kullanırsınız. Bu operatörlerin o vektörler üzerinde basit bir etkisi olduğu için çarpım durumları arasında bu ifadenin matris elemanları doğrudan çıkarılabilir.

Kesin *toplam* açısal momentum, $|s,m_s\rangle$ durumlarının hepsinin kesin tekil açısal momentum durumları, yani $|\pm\pm\rangle$, ile aynı olmadığını farkedin. Bunun sebebi toplam açısal momentumun bireysel açısal momentum ile uyuşumlu olmamasıdır. Örneğin,

$$[\mathbf{S}^2, S_{1i}] = [S_1^2 + S_2^2 + 2(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z}), S_{1i}] \neq 0$$

Bir çift değişmeli gözlenebilirler kümesi $(S_1^2, S_2^2, S_{1z}, S_{2z})$ ve $(S_1^2, S_2^2, \mathbf{S}^2, \mathbf{S}_z)$ ile verilir. Birinci kümenin özvektörleri herbir tek parçacık açısal momentumunun kesinlikle bilindiği durumları temsil eden $|m_1,m_2\rangle = |\pm\pm\rangle$ çarpım bazlarıdır. İkinci kümenin özvektörleri toplam açısal momentumun kesinlikle bilindiği durumları temsil eden $|s,m_s\rangle$ durumları ile verilir.

Özdeş parçacıklar üzerine bir not

Kuantum mekaniğinde *özdeş parçacıklar*ın üstesinden gelen bir başka postülanın olduğunu not edelim. Bunlar doğası itibariyle benzer (aynı kütle, spin, elektrik yükü, vb.) olan parçacıklardır.

Bundan dolayı, tabii ki farklı durunlarda olabilmelerine rağmen bütün elektronlar özdeştir. Bu, elektronlar *tam olarak* ayırdedilemez demek değildir, çünkü dünyadaki bir elektronu güneşteki bir elektrondan açık bir biçimde ayırt edebiliriz. Bunlar faklı (konumsal) durumlarda bulunan iki elektrondur. Fakat biz bu parçacıkları değiş-tokuş edilebilir olarak görüyoruz, öyle ki, eğer siz bakmazken biri güneşteki elektonu alıp dünyadaki elektronla (ilgili durumlara sokarak) yer değiştirseydi, bunu söyleyemeyecektiniz. Özdeş parçacıkların bu kendine özgü ayırdedilemezliği çok parçacıklı sistemlerin durumlarının parçacık değiş-tokuşu altında bu simetriyi yansıtması için olanak sağlar. Bu simetri, parçacıkları değiş-tokuş eden kesikli, üniter bir dönüşüm olarak modellenir. (Üç aşağı beş yukarı relativistik kuantum alan teorisinden *türetilebilecek*) kuantum mekaniğinin bu postülası şöyledir : tamsayı spinli ("bozonlar") parçacıklar bu üniter dönüşüm altında değişmez (değiş-tokuş altında "çift") olmalıdır ve eğer parçacıklar buçuklu sayı spine sahipse ("fermiyonlar"), bunlar işaret değiştirmelidir (değiş-tokuş altında "tek").

İki spin 1/2 sisteminin *toplam* spin durumlarının gerçekten parçacık yer değiştirmesi altında çift ve tek olduğunu görebilirsiniz. Eğer iki parçacık özdeş ise ve başka bir serbestlik derecesi mevcut değilse, sadece anti-simetrik tekli durumun kullanılması gerekir. Tabii ki, gerçek parçacıklar ötelemsel serbestlik derecelerine sahiptir ve durum bunu yansıtacaktır. Konum dalga fonksiyonlarını kullanarak bu serbestlik derecelerini nitelemek için simetrik ve anti-simetrik kombinasyonları tekrar göz önüne alınabilir. Yalnızca, *toplam* durum vektörü uygun simetriye sahip olmalıdır. Örneğin, Helyum atomundaki iki elektronun taban durumunu düşünün. Konum uzayı taban durumu dalga fonksiyonu parçacık yer değiştirmesi altında simetriktir. Bu nedenle, temel durum bir tekli olmalıdır. Uyarılmış durumlar, eğer durum vektörünün "konum kısmı" parçacık yer değiştirmesi altında anti-simetrik ise ancak o zaman simetrik spin durumları ile tasvir edilebilir.