

Kuantum mekaniğinde dönme hareketleri

Şimdi, bir evvelce düşündüğümüz hususların kuantum mekaniği ile olan ilgisini irdeleyeceğiz. Kuantum mekaniğinde uzay ve zamandaki dönüşümler sisteme ait Hilbert uzayında üniter dönüşümler ile “temsil edilir” veya “gerçekleştirilir”. Buradaki fikir şudur : eğer 3-d’de bir sisteme bir dönüşüm uygularsanız, sistemin durumu değişir ve bu, sisteme ait durum vektörünün dönüşümü şeklinde matematiksel olarak temsil edilmelidir. Zamansal ve uzaysal ötelemelerin bu biçimde nasıl tasvir edildiğini zaten gördük. Bu aynı şablonu takip ederek, herbir R dönüşüne, $D(R)$ üniter dönüşümü tanımlamak istiyoruz, öyle ki, eğer $|\psi\rangle$ sisteme ait bir durum vektörü ise $D(R)|\psi\rangle$ sistemin R ile nitelenen dönüşüme uğradıktan sonraki durum vektörünü temsil eder. Buradaki anahtar gereksinim, iki dönüşün birleşerek bir üçüncü dönüş yapması için gereken şablonun üniter operatörlerle “taklit” edilmesidir. Bunun için, $D(R)$ üniter operatörlerinin sürekli biçimde dönme eksenine ve açısına bağlı olmasını ve

$$D(R_1)D(R_2) = e^{i\omega_{12}} D(R_1R_2)$$

sağlamasını şart koşarız, burada ω_{12} , temsiline de belirttiği gibi, R_1 ve R_2 dönüşlerinin seçimine bağlı olabilen gerçel bir sayıdır. Durum vektörü $D(R_1R_2)|\psi\rangle$, $e^{i\omega_{12}} D(R_1R_2)|\psi\rangle$ durumundan *fiziksel olarak* ayırt edilemediği için bu faz serbestliğine izin veriliyor.

Eğer, bu $D(R)$ üniter operatör ailesini kurmayı başarırırsak, bir “bir faz farkına kadar dönme grubunun üniter temsili” veya bir “dönme grubunun projektif üniter temsili” kurduğumuzu söyleriz. Bütün ω parametrelerinin, basitçe, dönüşlerin üniter temsilcilerini yapılandırmada birinin sahip olabileceği kısmi bazı serbestlikleri belirttiğini düşünebilirsiniz. (Eğer temsilde tüm ω parametreleri yok oluyorsa, sadece “dönme grubunun üniter temsili”nden bahsederiz.)

Dönme hareketlerinin temsilcileri için birleşme kuralındaki bu olası faz serbestliği tamamen kuantum mekaniğin bir ihtimaldir ve önemli fiziksel neticeler doğurur. Bu arada, ders kitabınız, dönme hareketlerinin temsiline genel tanımında bu faz serbestliğine izin vermekte sınıfta kalıyor. Bu pedagojik bir hatadır ve bunda da önemlidir. Bu hata çok ironiktir : ders kitabı, ilk örneğinde, $D(R)$ operatörlerini spin 1/2 sistemi için veriyor ki burada faz faktörleri, göreceğimiz gibi, kesinlikle değersiz değildir.

Sonsuz Küçük Dönmeler ve Açısız Momentum

$D(R)$ sürekli tarzda bir eksene ve bir açıya bağlı olduğu için, bunun sonsuz küçük formunu

düşünebiliriz. Sabit bir \hat{n} eksenini ve sonsuz küçük ϵ için

$$D(R) \approx I - \frac{i}{\hbar} \epsilon \vec{n} \cdot \vec{J}$$

elde ederiz, burada

$$\vec{J} = (J_1, J_2, J_3) = (J_x, J_y, J_z)$$

$J_i^\dagger = J_i$ açısal momentum boyutunda (bunların matris elemanları ve özdeğerlerinin bu boyutta olmaları hasebiyle), kendine eşlenik operatörlerdir. J_i operatörü, Hilbert uzayında, x^i eksenini etrafında dönmeye karşılık gelen dönüşümleri üretir. Bu J_i operatörlerini, sisteme ait açısal momentum gözlenebilirleri ile tanılarız. Tabii ki, açısal momentumun bu matematiksel modelinin fiziksel sağlaması fiziksel sistemlerin tasvirindeki bu stratejinin açık başarısına dayanmaktadır. Özellikle, J_i (uygun koşullar altında) korunacaktır.

Hilbert uzayında üniter dönüşümlerin 3-d uzaydaki dönmeleri düzgün bir şekilde “taklit” (daha doğrusu, “projektif olarak temsil”) etmesini talep ederek, açısal momentum operatörlerinin

$$[J_k, J_\ell] = i\hbar \epsilon_{k\ell m} J_m$$

sıradışı bağıntılarını sağladığı gösterilebilir (faz faktörlerinin ihmal edildiği bir biçimi için kitabımıza bakın). İspatın biraz sürmesi ve burada gözardı edilmesine rağmen, bu sonuç oldukça anlamlıdır. Gerçekten de 3-d uzayda sonsuz küçük üreteçlerin sıradışı bağıntıları çeşitli dönme hareketlerinin arasındaki geometrik bağlantıyı kodluyor. Bundan dolayı, durum vektörlerinin uzayında dönmelerin üreteçlerinin, 3-d uzayda dönmelerle aynı sıradışı bağıntılarına uyma gerekliliği sürpriz değildir (bir $i\hbar$ farkıyla ki, bu \vec{J} 'yi tanımlama şeklimizden ortaya çıkıyor).

Spin 1/2 sistemi için spin gözlenebilirlerinin bu sıradışı bağıntılarını sağladığını ödevinizde gördünüz. Bu sebeple, spin gözlenebilirlerini bir çeşit açısal momentum gibi olduğunu tespit ediyoruz. Bu sadece bir terminoloji meselesi değildir. Kapalı bir sistemde (örneğin, bir atomik elektron ve bir foton), açısal momentum korunur. Ancak, bir altsistemin (örneğin bu elektron) açısal momentumunun korunması gerekli değildir, çünkü toplam açısal momentum korunacak şekilde sistemin geri kalanı (örneğin bu foton) ile açısal momentum değiş-tokuşu yapabilir. Bu şekilde, açısal momentumun korunumu tarafından sağlanan bu “muhasabe”, “hesapları dengelemek” için spin açısal momentum katkısının işe dahil edilmesini gerektirir. Spin açısal momentum, kapalı bir sistemin korunan açısal momentumuna bir katkı sağlar.

Zaman ve uzay ötelemelerinde kullandığımız matematiksel teknolojinin aynısını kullanarak, (sonsuz küçükün tersine) sonlu bir dönmenin formal olarak

$$D(\vec{n}, \theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I - \frac{i}{\hbar} \frac{\theta}{N} \vec{n} \cdot \vec{J} \right) = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \vec{n} \cdot \vec{J}}$$

formülüne yol açan “birçok” sonsuz küçük dönmeden yapılandırılabilmesini görmek zor değildir.

Bu üstel operatörün, \vec{J} 'ninki gibi, detaylı formu, çalışılan özel fiziksel sisteme bağlıdır. Açısal momentumun en bilindik formu herhalde 3-d'de hareket eden bir parçacığınkidir. Bununla beraber, spin, açısal momentumun bir türüdür (yukarıdaki tipte bir analize göre) ve matematiksel olarak konuşursak en kolaydır. Dolayısıyla, ilk önce buna bakacağız.

Açısal momentum olarak spin

S_i , spin 1/2 gözlenebilirlerinin açısal momentum boyutunda olduğunu ve açısal momentum sıradışı bağını sağladığını hatırlayacağız :

$$[S_k, S_\ell] = i\hbar\epsilon_{k\ell m}S_m$$

Biz bundan dolayı spin 1/2 sistemin dönmelerinin

$$D(\vec{n}, \theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{S}}$$

formundaki üniter operatörlerle yerine getirildiğini buluyoruz. Haydi, şimdi, bir örneğe göz atalım.

z eksenini etrafında bir dönmeyi göz önüne alalım. S_z 'nin özvektörlerini bir baz olarak kullanıp

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matris elemanlarını elde ederiz, böylelikle dönme hareketi operatörünün matris elemanları (alıştırma)

$$D(\hat{z}, \theta) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\theta} \end{pmatrix}.$$

Bu hesaplamayı üstel fonksiyonun kuvvet serisi tanımını kullanarak yapabilirsiniz – bu gidişatı çabucak göreceksiniz. Tayfsal ayrışım tanımını da kullanabilirsiniz. herhangi bir kendine eşlenik A operatörü için elimizde

$$A = \sum_i a_i |i\rangle\langle i|$$

olduğunu hatırlayalım, burada $A|i\rangle = a_i|i\rangle$. Benzer şekilde, ödevde gördüğümüz gibi

$$f(A) = \sum_i f(a_i) |i\rangle\langle i|.$$

Diyelim ki,

$$A = S_z = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|)$$

ve f uygun bir üstel fonksiyon olsun buna göre,

$$D(\hat{z}, \theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta S_z} = e^{-\frac{i}{2}\theta} |+\rangle\langle +| + e^{\frac{i}{2}\theta} |-\rangle\langle -|$$

elde edersiniz.

Bu üniter operatör ailesinin olması gerektiği gibi

$$D(\hat{z}, \theta_1)D(\hat{z}, \theta_2) = D(\hat{z}, \theta_1 + \theta_2)$$

sağladığını gözden kaçırmayın. Diğer taraftan, ilginç birşeyin gerçekleştiğini hemen farketmelisiniz. Spin 1/2 sisteminin 2π 'lik bir dönmeye karşılık gelen üniter dönüşümü özdeşlik değil, aksine eksi özdeşliktir! Bundan dolayı, eğer spin 1/2 sistemi 2π kadar döndürürseniz, bunun $|\psi\rangle$ durum vektörü

$$|\psi\rangle \rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar}(2\pi)S_z}|\psi\rangle = -|\psi\rangle$$

haline dönüşür. Gerçekten de, sadece 4π kadar bir dönmeden sonra spin 1/2 durum vektörü orijinal değerine geri gelir. Bu kötü görünüyor; böyle bir dönüşüm kuralı nasıl deneyile örtüşür? Aslına bakarsak, beklenen değerler bu işaret değişimine karşı duyarsız olduğu için herşey çok iyi işliyor :

$$\langle\psi|A|\psi\rangle \rightarrow \langle\psi|e^{\frac{i}{\hbar}(2\pi)S_z}Ae^{-\frac{i}{\hbar}(2\pi)S_z}|\psi\rangle = \langle\psi|(-1)A(-1)|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

Burada olan şey şudur, spin 1/2 sistemi projektif temsildeki faz serbestliğinden faydalanıyor. Bir taraftan da elimizde

$$R(\hat{n}, \theta)R(\hat{n}, 2\pi - \theta) = R(\hat{n}, \theta) = R(\hat{n}, 0) = I$$

var. Spin 1/2 temsili için

$$D(\hat{n}, \theta)D(\hat{n}, 2\pi - \theta) = -I = -D(\hat{n}, 0)$$

elde ederiz.

Dönme hareketlerinin temsilindeki faz serbestliği daha çok, kuantum mekaniğinin fiziksel dünyayı tasvir etme yollarının güç anlaşılabilir ve çapraşık bir özelliğidir. Teorinin bu inceliğinden dolayı spin 1/2 sistemlerini tam anlamıyla barındırabiliyoruz. Bu, kuantum mekaniğinin büyük başarılarından biridir. Gözlenebilir büyüklükler, z etrafında döndürdüğümüzde genel olarak nasıl değişir? Beklenen değer z etrafında bir dönme altında

$$\langle A \rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle \rightarrow \langle\psi|e^{\frac{i}{\hbar}\theta S_z}Ae^{-\frac{i}{\hbar}\theta S_z}|\psi\rangle$$

yoluyla dönüşür. Örneğin $A = S_x$ seçin. Üstleri Taylor serisine açarak veya tayfsal ayrışımı kullanarak ve

$$S_z = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|), \quad S_x = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$$

ifadelerinden faydalanarak

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}\theta S_z}Ae^{-\frac{i}{\hbar}\theta S_z} &= \frac{\hbar}{2}(e^{i\theta}|+\rangle\langle-| + e^{-i\theta}|-\rangle\langle+|) \\ &= \cos\theta S_x - \sin\theta S_y \end{aligned}$$

elde ederiz (alıştırma). Bir vektörün x bileşeni, z eksenine etrafındaki bir dönme altında tam olarak bu şekilde dönüşür.

$$\langle S_x \rangle \rightarrow \cos \theta \langle S_x \rangle - \sin \theta \langle S_y \rangle$$

Durum vektörü dönüşürken benzer şekilde,

$$\langle S_y \rangle \rightarrow \cos \theta \langle S_y \rangle + \sin \theta \langle S_x \rangle$$

takip eder ve kolayca,

$$\langle S_z \rangle \rightarrow \langle S_z \rangle$$

olduğunu görebilirsiniz.

İşlemciler üzerinde temsil edilen dönme hareketleri

Yukarıdaki sonucun peşini bırakmadan devam edelim. Gördük ki,

$$e^{\frac{i}{\hbar}\theta S_z} A e^{-\frac{i}{\hbar}\theta S_z} = \cos \theta S_x - \sin \theta S_y$$

Yukarıdaki denklemde sol tarafta 3 Hilbert uzayı operatörünün çarpımı görünüyor, ki bu, bir dönme hareketinin yerini tutan üniter bir dönüşüm yoluyla sistemin durumunu değiştirdiğinizde spin vektörü gözlemlenebilirine ne olduğuna karşılık gelir. Denklemin sağ tarafındaki operatör, sanki 3-d uzayda bir vektörün bileşeniymiş gibi döndürürerek elde ettiğiniz spin operatörlerinin doğrusal bir kombinasyonudur. Bu, 3-d uzaydaki dönme hareketlerini bunların durum vektörlerinin uzayındaki üniter temsilcilerine bağlayan genel bir kuralı yansıtır :

$$D^\dagger(\hat{n}, \theta) \vec{S} D(\hat{n}, \theta) = R(\vec{n}, \theta) \vec{S}$$

Bu bağıntıdan, \vec{S} 'nin beklenen değerlerinin bir vektörün bileşenleri gibi davranacağını hemen görebilirsiniz. Daha genel olarak, eğer \vec{V} bir vektör gözlenebilirini temsil eden Hilbert uzayında kendine eşlenik operatörlerin herhangi bir üçlüsü ise, buradan

$$D^\dagger(\hat{n}, \theta) \vec{V} D(\hat{n}, \theta) = R(\vec{n}, \theta) \vec{V}$$

Bunun, şimdi artık dönme hareketleri için, Heisenberg resmine benzeşik olduğunu düşünebilirsiniz. Sistemin bir dönmesi matematiksel açıdan durum vektörünün bir dönüşümü olarak, veya eşit bir biçimde, gözlenebilirlerin bir dönüşümü olarak görülebilir (fakat her ikisi birden değil!).