Ders 10

Metindeki ilgili bölümler §1.7

Gaussiyen durum

Burada, 1-d'de hareket eden bir parçacığın önemli Gaussiyen durumu örneğini düşünüyoruz. Ele alış biçimimiz kitaptaki ile neredeyse aynı ama bu örnek burada tekrardan vermek için yeterince öğreticidir.

Bu durumu, konum bazında bileşenlerini, yani dalga fonksiyonunu, vererek tanımlıyoruz :

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{(d)}}\right) \exp\left(ikx - \frac{x^2}{2d^2}\right).$$

İyi bir alıştırma olarak bu dalga fonksiyonunun boylandırılmış olduğunu kontrol edebilirsiniz :

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x)|^2.$$

Kabaca söylemek gerekirse, dalga fonksiyonu, orijinde merkezli Gaussiyen zarf içinde oturmasına karşın $\frac{2\pi}{\hbar}$ dalga boylu ile salınımlıdır. Konum için olasılık yoğunluğu, genişliği d ile belirlenen orijinde merkezlenen bir Gaussiyen'dir. Dolayısıyla bu durum, d ile belirtilen istatistiksel belirsizlik içinde orijin yakınında"yerelleşmiş" bir parçacığı temsil eder.

Bunu daha hassas yapalım ve bu durumun özelliklerini ortaya koyalım. Bir alıştırma olarak aşağıdaki sonuçları kontrol edebilirsiniz.

$$\langle X\rangle = \langle\psi|X|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x|\psi(x)|^2 = 0$$

öyle ki bu durumda parçacığın ortalama konumu orijindedir. Takiben,

$$\langle X^2\rangle = \langle\psi|X^2|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2|\psi(x)|^2 = \frac{d^2}{2}.$$

elde ederiz. Böylelikle konumdaki yayılma

$$\langle \Delta X^2\rangle = \frac{d^2}{2}$$

olur, yani konuma ait olasılık dağılımının standart sapması $\frac{d}{\sqrt{2}}$'dir. Bundan sonra,

$$\langle P\rangle = \langle\psi|P|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x) = \hbar k$$

buluruz, ki bize, bu durumun ortalama olarak $\hbar k$ momentumuyla hareket eden bir parçacığa sahip olduğunu anlatır, ve

$$\langle P^2\rangle = \langle\psi|P^2|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)(-\hbar^2)\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{\hbar^2}{2d^2} + \hbar^2 k^2.$$

böylece momentum belirsizliği

$$\langle \Delta P^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2d^2}.$$

Bundan dolayı momentum belirsizliği konum belirsizliğine göre d ile ters orantılı olarak değişir. Konum ve momentum belirsizliklerinin çarpımı belirsizlik ilkesi tarafından izin verilen kadar küçük olabilir. Bazen $|\psi\rangle$ bir *minimum belirsizlikli durum* olarak adlandırılır.

Gaussiyen fonksiyonun Fourier dönüşümü bir başka Gaussiyen olduğu için, momentum olasılık dağılımının bir Gauesyen olduğu ortaya çıkar :

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px}\psi(x) \\ &= \sqrt{\frac{d}{\hbar\sqrt{\pi}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar^2}(p-\hbar k)^2 d^2\right\}\end{aligned}$$

Bu Gaussiyen'in beklenen momentum değeri üstünde, olması gerektiği gibi, zirve yaptığını ve genişliğinin de, beklenildiği gibi, yani konum belirsizliğine ters olarak, $1/d$ gibi değiştiğini görebilirsiniz.

Özetle, tanımladığımız Gaussiyen durum (ortalamada) hareket etmekte olan bir parçacığa karşılık gelir ve konum ve momentum değerlerinin, belirsizlik çarpımını minimize eden, bir Gaussiyen dağılımı vardır. Böyle durumlar makroskopik cisimleri modellemek için kullanılabilir. Sadece d ve k için mantıklı değerleri yerine koyun, ve böylece kuantum belirsizliklerin ihmal edilebilecek şekilde yeterince küçük olduğunu bulacaksınız.

Kuantum mekaniğinde sistemleri birleştirme

1-d'de hareket eden bir parçacıktan 3-d'de hareket eden bir parçacığa genelleştirmemizde üstü kapalı olarak bileşik sistem yapmak için sistemleri birleştirmeye yarayan genel bir kuantum mekaniksel şemadan faydalandık. Bilhassa, 3-d'de hareket eden bir parçacığı esasen 3 kopya 1-d'de hareket eden parçacık olarak gördük. Fizikte bu tip bir şeyi sürekli yaparız. Örneğin, eğer bir parçacığın tatmin edici bir kinematik modelini elde edersek ve 2 parçacık için bir kinematik model düşünmek istersek, doğal olarak bir parçacık için kullandığımız modelden iki kopya kullanmaya çalışırız. Bir başka örnek olarak, spin 1/2 sisteminin bir modelini sunmuştuk, eğer 2 spin 1/2 parçacığı tasvir etmek istersek ne olur? Veya spini 1 olan bir parçacığı tarif etmek istersek ne olur? Tüm bu haller, bileşik sistemler yapmak için kuantum mekaniksel modelleri nasıl birleştireceğimizi bilmemizi gerektiriyor. Burada, 1-d'de bir parçacıktan 3-d'ye bir parçacığa genellememizi bir resim olarak kullanarak bu şemayı ana hatlarıyla belirteceğiz. Daha sonra, bu kuruluşu tekrar kullanma fırsatı bulacağız.

Tensör çarpım

Herbiri, tabii ki, sadece kendi ilgili olduğu Hilbert uzayında tanımlı olan $A_1, B_1, \ldots$ ve $A_2, B_2, \ldots$ doğrusal operatörlerince temsil edilen gözlenebilirlerle $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ Hilbert uzayları tarafından tasvir edilen iki sistemi birleştirmeyi istediğimizi varsayın. Bu kombine sistem için bir Hilbert uzayını aşağıdaki gibi kurabiliriz. İlk önce herbir Hilbert uzayından gelen vektörlerin tüm sıralı çiftlerinden oluşan kümeyi düşünüyoruz. Tipik elemanlar

$$|\psi, \chi\rangle := |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle, \qquad |\psi\rangle \in \mathcal{H}_1, \quad |\chi\rangle \in \mathcal{H}_2.$$

ile gösterilir. Bu vektörler *çarpım vektörler* olarak adlandırılır. Fiziksel olarak, bir $|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle$ çarpım vektörü, 1. sistemin $|\psi\rangle$ durumunda ve 2. sistem $|\chi\rangle$ durumunda olduğu, bileşik sistemin bir durumudur.

Çarpım vektörleri, $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$'de mevcut olandan intikal eden doğal bir skaler çarpım kabul ederler :

$$c|\psi, \chi\rangle := (c|\psi\rangle) \otimes |\chi\rangle \equiv |\psi\rangle \otimes (c|\chi\rangle)$$

Özel çarpım vektörleri üzerinde bir toplama kavramı tanımlamak olasıdır. Elde

$$|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle + |\gamma\rangle \otimes |\beta\rangle := (|\alpha\rangle + |\gamma\rangle) \otimes |\beta\rangle,$$

ve

$$|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle + |\alpha\rangle \otimes |\gamma\rangle = |\alpha\rangle \otimes (|\beta\rangle + |\gamma\rangle).$$

var. Belli ki, bu, bütün çarpım vektörleri üzerinde bir toplama işlemi tanımlamaz. Yukarıdaki özel formda olmayan toplamalar için tek yapmamız gereken kümemizin yeni bir elemanı olarak,

$$|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle + |\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle$$

tanımlamaktır. Daha sonra basitçe çarpım vektörlerinin tüm formal doğrusal kombinasyonlarının kümesini, yeni, bileşik Hilbert uzayında bir küme olarak kullanmak için alırız. Bu küme $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$'nin *tensör çarpımı* olarak adlandırılan ve $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ şeklinde gösterilen bir vektör uzayıdır. Ders kitabımız bu kuruluş için "direkt çarpım" terminolojisini kullanıyor.

Tensör çarpım için bir baz, $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$'nin herbirinin bir bazından kurulan tüm çarpım vektörleri alınarak elde edilebilir (alıştırma). Eğer $|e_i\rangle$'ler $\mathcal{H}_1$'in bir bazı ise ve $|f_i\rangle$'ler de $\mathcal{H}_2$'nin bir bazı ise o zaman her $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} a_{ij} |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle$$

şeklinde yazılabilir. Tensör çarpım için her bazın, çarpım vektörlerden kurulmayacağını dikkate alın. Ayrıca, çarpım uzayının boyutunun ayrık herbir Hilbert uzayın boyutlarının çarpımı olduğunu da not edin. Bir başka deyişle, eğer n_1, $\mathcal{H}_1$'in boyutu ise ve n_2 de $\mathcal{H}_2$'nin boyutu ise o zaman $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$'nin boyutu $n_1 n_2$'dir. Bunu görmek için, sadece, herhangi bir vektörün yukarıdaki bu çarpım bazında açılımdaki a_{ij} sayılarının dizisinde $n_1 n_2$ tane eleman olduğuna dikkat edin.

Tensör çarpım uzayının bir Hilbert uzayı olması istenir. Skalar çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır. Çarpım vektörleri için elde

$$\langle \alpha, \beta | \gamma, \delta \rangle = \langle \alpha | \gamma \rangle \langle \beta | \delta \rangle$$

var. Genel vektörleri, çarpım vektörlerinin bir bazında açarız ve sonra skalar çarpımlarını, skalar çarpımın her zamanki doğrusallığı/anti-doğrusallığı yoluyla tanımlarız.

Durumların uzayının bir vektör uzayı olması gerekliliğinin, bizi, çarpım durum vektörlerinin mümkün olan bütün (boylandırılabilir) doğrusal kombinasyonlarını da, durum vektörleri olarak düşünmeye zorladığını not edelim. Böyle doğrusal kombinasyonlar, herbir altsistemin belli bir durumda olduğu söylenecek şekilde yorumlanabilir olmayacaktır. Bilakis, böyle doğrusal kombinasyonlarda herbir altsistemin çeşitli durumlarda olması için çeşitli olasılıklar olacaktır. Üstelik, herbir altsistemin olasılık dağılımları arasında korelasyonlar olacaktır. Bu, kuantum *dolaşıklık*ın esasıdır; bileşik sistemlerin "klasik" analoglarına kıyasla göze çarpan çok şaşırtıcı fiziksel davranışından bu sorumludur. Umarım, dönemin sonunda bunu daha fazla tartışmak için biraz zamanımız olur. Bir örnek olarak, 2 spin 1/2 sisteminden oluşan bir sistem düşünün (örneğin, spin dışındaki bütün serbestlik dereceleri ihmal edilen bir elektron ve bir pozitron). Durumların Hilbert uzayı için bir (çarpım) baz $|\pm\rangle \otimes |\pm\rangle$'lerin dört kombinasyonu olabilir. Burada ilk vektör 1. parçacığın S_z özvektörlerini ve ikinci vektör de 2. parçacığın S_z özvektörlerini gösteriyor. Bu vektörler, herbir parçacık için S_z'nin kesinlikle bilindiği durumları temsil ediyor. Şu şekildeki bir vektör,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |+\rangle + |-\rangle \otimes |-\rangle)$$

iki parçacığın da S_z için istatistiksel olarak kesin değerler almadığı bir durumu gösterir.

Yukarıdaki bütün bu yapıların aynı tarzda braların uzayı için de gerçekleştirilebileceğini kolayca kontrol edebilirsiniz. Özellikle,

$$\langle \alpha | \otimes \langle \beta | = (|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle)^\dagger$$

elde ederiz.

Bir örnek olarak, 1-d'de hareket eden (x ve y şeklinde etiketlenmiş) 2 parçacığın bir çarpımından inşa edilmiş olarak 2-d'de hareket eden bir parçacık düşünelim. $|x\rangle$, x'de hareket eden parçacık için bir bazdır ve $|y\rangle$, y'de hareket eden parçacık için bir bazdır. Buna tekabül eden çarpım bazı $|x\rangle \otimes |y\rangle$'dır. Çarpım uzayında genel bir vektör,

$$|\psi\rangle = \int d^2x (|x\rangle \otimes |y\rangle)(\langle x| \otimes \langle y|)|\psi\rangle)$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi,

$$\psi(x,y) = (\langle x| \otimes \langle y|)|\psi\rangle$$

tanımlıyoruz. Vektörlerin, iki değişkenli kompleks değerli fonksiyonlar olan konum dalga fonksiyonları ile nitelendirildiğini görüyorsunuz. Bu dalga fonksiyonları karesi integrallenebilir olmalıdır, bunu

$$|\psi\rangle = \int dx\, dy\, \psi(x,y)|x\rangle \otimes |y\rangle$$

$$\langle\psi| = \int dx'\, dy'\, \psi^*(x,y)\langle x| \otimes \langle y|$$

yazarak ve

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int d^2x\, |\psi(x,y)|^2.$$

hesaplayarak görebilirsiniz (alıştırma). Bire boylandırma ile, $|\psi(x,y)|^2$, tabii ki, (x,y) noktasında bulunma olasılık yoğunluğu olarak yorumlanabilir.