Ders 9

Metindeki ilgili bölümler §1.6, 1.7

Momentum dalga fonksiyonları

Bir kişinin bir takım dalga fonksiyonları tanımlamak için herhangi bir sürekli gözlenebiliri kullanabileceğini zaten belirtmiştik. Bu zamana kadar konum gözlenebilirini kullandık. Şimdi momentum gözlenebilirini kullanmayı ele alalım. Her zamanki gibi,*

$$P|p\rangle = p|p\rangle, \qquad p \in \mathbf{R}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dp|p\rangle\langle p|,$$

$$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle, \qquad P\psi(p) = p\psi(p),$$

v.b. şekilde tanımlarımızı yaparız. Momentum dalga fonksiyonunun yorumu, momentumun $[p, p+dp]$ aralığında olma olasılığının $|\psi(p)|^2 dp$ olduğudur. Başka bir deyişle,

$$Prob(P \in [a,b]) = \int_a^b dp|\psi(p)|^2.$$

Bir momentum dalga fonksiyonunun ötelenmesinin basit bir faz dönüşümü olduğunu not edin (egzesiz) :

$$T_a\psi(p) = \langle p|e^{-\frac{i}{\hbar}aP}|\psi\rangle = e^{-iap}\psi(p)$$

Fiziksel olarak, bu, momentum olasılık dağılımı üzerinde ötelemenin hiçbir etkisinin olmadığı anlamına gelir (alıştırma). Alıştırma : momentumun dalga fonksiyonu temsilini kullanarak T_a'nın üniter olup olmadığını kontrol edin.

Konum ve momentum (genelleştirilmiş) özvektörleri arasında çok kullanışlı ve önemli bir ilişki vardır. Ona ulaşmak için, momentum özvektörünü temsil eden konum dalga fonksiyonu olarak anlaşılabilen, $\langle x|p\rangle$ skalar çarpımını çalışırız. Bu ayrıca, konum özvektörünü temsil eden momentum dalga fonksiyonunun kompleks eşleniği olarak da görülebilir. Bu, x'in kompleks fonksiyonu (her p için)

$$\langle x-\epsilon|p\rangle = \langle x|T_\epsilon|p\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon p}\langle x|p\rangle$$

sağlamalıdır. Bu (ϵ'da birinci dereceye kadar)

$$\frac{d}{dx}\langle x|p\rangle = \frac{i}{\hbar}p\langle x|p\rangle$$

*Tabii ki, bu özellikler, örneğin P'nin spektrumu, doğrudan öteleme operatörünün tanımından türetilmelidir. Bu yapılabilir fakat bunu burada açıkça yapmayacağız.

işaret eder. Bu denklemin çözümü

$$\langle x|p\rangle = (sabit)e^{\frac{i}{\hbar}px}.$$

Sabit, boylandırma koşulundan belirlenir :

$$\delta(p,p') = \langle p|p'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle p|x\rangle\langle x|p'\rangle$$

Delta fonksiyonunun

$$\delta(p,p') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix(p'-p)}$$

Fourier gösterimini kullanarak

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px}$$

olduğunu görürüz (alıştırma).

Böylece, dalga mekaniğinden bilindik bir sonucu yeniden bulmuş olduk : bir parçacığın momentumunun (1 olasılıkla) p değerini aldığı durumdaki konum uzayı dalga fonksiyonu, dalga boyu $\frac{2\pi\hbar}{p}$ olan (kompleks) düzlem dalgadır.* Dalga fonksiyonunun mutlak değeri bir olduğu için parçacık her yerde eşit bulunma olasılığına sahiptir (düşünün : belirsizlik bağıntısı). Kütlesi m olan bir serbest parçacığın enerjisi

$$H = \frac{P^2}{2m}$$

olduğu için bu dalga fonksiyonunun $p^2/2m$ enerjili bir serbest parçacığı tarif ettiğini not edin.

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px},$$

olduğu için bir parçacığın konumu belirli bir idealleştirilmiş durumda, momentum uzayı olasılık genliğinin de düzlem dalga olduğunu görürüz. İyi yerelleşmiş bir parçacık için, tüm momentumlar eşit şekilde olasıdır (yine belirsizlik bağıntısı).

Eldeki bu sonuçlar ile konum ve momentum bazları arasında açık bir bağıntı verebiliriz :

$$|x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp|p\rangle\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}|p\rangle,$$

ve

$$|p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx|x\rangle\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{\frac{i}{\hbar}px}|x\rangle.$$

Eğer,

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle, \qquad \tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$$

*Tabii ki düzlem dalgalar boylandırılabilir değildir. Fakat bu inceliği zaten tartıştık.

olarak ayarlarsak,

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{\frac{i}{\hbar}px} \tilde{\psi}(p),$$

ve

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{i}{\hbar}px} \psi(x),$$

elde ederiz (alıştırma). Böylelikle, konum dalga fonksiyonları ve momentum dalga fonksiyonları Fourier dönüşümleri ile bağlantılıdır.

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x)\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\psi}^*(p)\tilde{\phi}(p)$$

olduğunu not edin (alıştırma).

Momentum temsilinde, momentum operatörü bir "çarpım operatörü"dür :

$$P\tilde{\psi}(p) = \langle p|P|\psi\rangle = p\langle p|\psi\rangle = p\tilde{\psi}(p),$$

halbuki konum operatörü bir "türev operatörü" dür :

$$\begin{aligned}
X\tilde{\psi}(p) &= X\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{i}{\hbar}px} \psi(x)\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{i}{\hbar}px} x\psi(x) \\
&= -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{i}{\hbar}px} x\psi(x) \\
&= -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\tilde{\psi}(p)}{\partial p}.
\end{aligned}$$

Beklenen değerler

Beklenen değerleri, konum ve momentum temsillerinde hesaplamak kolaydır. Özel olarak,

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle, \qquad \tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle,$$

notasyonunu kullanarak, aşağıdaki

$$\langle\psi|f(X)|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)|\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\psi}^*(p) f(-\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dp})\tilde{\psi}(p),$$

ve

$$\langle\psi|f(P)|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p)|\tilde{\psi}(p)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{\psi}^*(x) f(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx})\tilde{\psi}(x)$$

elde ederiz. Çok iyi bir alıştırma olarak bunları ispatlamalısınız.

Üç boyutta parçacık

Üç boyutta bir parçacığa genelleme, esasen daha önce elde ettiğimiz yapıları üçe katlayarak yapılır. Burada kısaca bu genellemeyi izah ediyoruz. Arkasından, bir kuantum mekaniksel modele genellikle bu yolla "serbestlik dereceleri" eklenmesine nasıl bakılacağını göstereceğim.

3-d'de, şimdi $X^i = (X, Y, Z)$ bileşenleri ile $\mathbf{X}$ konum vektörlerimiz ve $P_i = (P_x, P_y, P_z)$ bileşenli $\mathbf{P}$ momentum vektörlerimiz var. Herbir (X^i, P_i) çifti aynen daha önce olduğu gibi kendine eşlenik operatörlerle temsil edilir. Bunların aşağıdaki *kanonik sıradeğişim bağıntılarına* sahip olasını istiyoruz :

$$[X^i, X^j] = [P_i, P_j] = 0, \qquad [X^i, P_j] = i\hbar\delta^i_j I.$$

Elimizde $|\mathbf{x}\rangle$ konum (genelleştirilmiş) özvektörleri ve $|\mathbf{p}\rangle$ momentum (genelleştirilmiş) özvektörleri var,

$$X^i|\mathbf{x}\rangle = x^i|\mathbf{x}\rangle, \qquad P_i|\mathbf{p}\rangle = p_i|\mathbf{p}\rangle.$$

Bunlar bir (genelleştirilmiş) baz oluşturur :

$$\int d^3x|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}| = I = \int d^3p|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|.$$

Burada integrallerin konum/momentum uzaylarının tümü üzerine alındığı anlaşılır.

Bu kendine eşlenik momentum operatörleri 3-d ötelemelere karşılık gelen üniter dönüşümler üretirler.

$$T_{\mathbf{a}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}}, \qquad T_{\mathbf{a}}|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle.$$

Kanonik sıradeğişim bağıntıları, ötelemelerin değişmeli işlemler olduğu gerçeğini yansıtıyor :

$$T_{\mathbf{a}}T_{\mathbf{b}} = T_{\mathbf{b}}T_{\mathbf{a}} = e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{P}} = T_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}.$$

Sıradeğişim bağıntılarının konum veya momentumun eşzamanlı (genelleştirilmiş) özvektörlerinin bir bazını seçmemize olanak sağlıdığına dikkat edin. Bu iki baz arasındaki ilişki

$$\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}.$$

Konum dalga fonksiyonları ve momentum dalga fonksiyonları herzamanki gibi durum vektörünün bileşenlerini karşılık gelen baz doğrultusunda alarak tanımlanır :

$$\psi(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{x}|\psi\rangle, \qquad \tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \langle\mathbf{p}|\psi\rangle.$$

Sonra

$$X^i\psi(\mathbf{x}) = x^i\psi(\mathbf{x}), \qquad P_i\psi(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^i}\psi(\mathbf{x})$$

ve

$$X^i\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p_i}\tilde{\psi}(\mathbf{p}), \qquad P_i\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = p_i\tilde{\psi}(\mathbf{p})$$

elde ederiz. Konumun/momentumun, bir $V/\tilde{V}$ hacminde bulunmasına ait olasılık dağılımları

$$Prob(\mathbf{X} \in V) = \int_V d^3x|\psi(\mathrm{x})|^2, \qquad Prob(\mathbf{P} \in \tilde{V}) = \int_{\tilde{V}} d^3p|\tilde{\psi}(\mathrm{p})|^2.$$