Ders 4

Metindeki ilgili bölümler §1.2, 1.3, 1.4

Spin operatörleri

Sonunda, spin 1/2 sistemi için spin gözlenebilirlerinin tanımını ele alabiliriz. Bunu, operatörlerin açılımını belirli bir bazda vererek yapacağız. Durumları temsil eden baz vektörlerini

$$|\pm\rangle := |S_z, \pm\rangle\,,$$

olarak bilinen spinin z bileşeni ile gösteririz ve

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right) \\ S_y &= i\frac{\hbar}{2}\left(|-\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-|\right) \\ S_z &= \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right) \end{aligned}$$

tanımlarız.

Bir yönü seçtiğimize, onu z olarak adlandırdığımıza ve karşılık gelen spin durumlarını baz olarak kullandığımıza dikkat edin. Kuşkusuz, başka herhangi bir yön de seçilebilirdi. *Şimdi, S_z'nin yukarıdaki tanımı ile $|\pm\rangle$'lerin gerçekten S_z'nin $\pm\hbar/2$ özdeğerli özvektörleri olduğunu kontrol edebilirsiniz.* Bu bazda matris elemanlarını

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \langle+|A|+\rangle & \langle+|A|-\rangle \\ \langle-|A|+\rangle & \langle-|A|-\rangle \end{pmatrix},$$

şeklinde etiketleyerek $|\pm\rangle$ bazında aşağıdaki matris temsillerini de doğrulayabilirsiniz :

$$(S_x)_{ij} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (S_y)_{ij} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad (S_z)_{ij} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Son olarak, üç spin operatörünün de kendine eşlenik olduğunu kontrol edebilirsiniz. Neden bu özel operatörlerin seçildiği hakkında derin bir anlamaya sahip olmak için uzun bir süre geçecektir. Şimdilik, bunları sadece verilenler olarak alalım ve bunlarla neler yapabileceğimize bakalım.

İyi bir alıştırma olarak aşağıdakilerin

$$|S_x, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle), \qquad |S_y, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm i|-\rangle)$$

sırasıyla S_x ve S_y'nin $\pm\hbar/2$ özdeğerli özvektörleri olduğunu doğrulayabilirsiniz. Bu özvektörlerin normu ("uzunluğu") bir olacak şekilde boylandırılmış olduğunu not edin. Aslında, bu özvektörler S_z'ninkilerden farklıdır ve daha sonra değinilecektir. Şimdilik, bu üç operatörün herhangi bir özvektör paylaşmadığını not edin. Spin operatörlerinin özvektörlerinin hiçbirinin dejenere olmadığına da dikkat edin - alıştırma.

Tayfsal ayrışım

Spin operatörleri daha önce tartıştığımız gibi

$$A = \sum_{ij} A_{ij} |i\rangle\langle j|$$

genel formuna sahiptir. Buna rağmen, S_z'nin özellikle basit *köşegen* bir forma sahip olduğuna dikkat edin. Bunun sebebi kendi özvektörleri bazındaki açılımı ile temsil edilmesindendir. Bu sonucun çok genel olduğunu görmek zor değildir. Eğer $|i\rangle$ A'nın özvektörlerinin a_i özdeğerli ON bazı ise :

$$A|i\rangle = a_i|i\rangle$$

matris elemanları

$$A_{ij} = \langle i|A|j\rangle = a_j\langle i|j\rangle = a_i\delta_{ij}$$

öyleki (alıştırma)

$$A = \sum_{i} a_i|i\rangle\langle i|\,.$$

Bir operatörün bu gösterimine onun *tayfsal ayrışımı* denir. (Sonlu bir Hilbert uzayında) Özdeğerler kümesi bir operatörün *tayf*ını oluşturur, ki bu isim de bu terminolojiden gelir. S_z'nin tanımının onun tayfsal ayrışımı olduğunu kolayca görebilirsiniz.

Her kendine eşlenik operatör bir ON özvektör bazı kabul ettiği için böyle herbir operatörün tayfsal ayrışımı vardır. Tabiki, farklı operatörler, genellikle, farklı ON baz sağlarlar.

Olasılık yorumu

Şimdi, kuantum mekaniğinin üçüncü postülasını (beklenen değerleri köşegen matris elemanlarına ilişkilendiren) birtakım elementer durum vektörlerini fiziksel olarak yorumlamak için kullanacağız. S_z'nin $|+\rangle$ özvektörü ile başlayalım. *Bu vektörle temsil edilen durumda* (alıştırma)

$$\langle S_z\rangle = \langle +|S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}, \qquad \langle S_x\rangle = \langle S_y\rangle = 0\,.$$

elde ederiz. Bu, $|+\rangle \equiv |S_z,+\rangle$'nın, S_z'nin kesinlikle (1 olasılıkla) $+\hbar/2$ değerine sahip, bir durumu olması beklendiği için çok anlamlıdır. Bununla birlikte, Stern-Gerlach deneyinde böyle durumların S_x ve S_y için $\pm\hbar/2$'de eşit bulunma olasılığına sahip olduğunu ve dolayısıyla beklenen değerlerinin sıfır olduğunu gördük. Benzer yorumların (uygun x, y ve z permütasyonları ile) $|S_z,-\rangle$, $|S_x,\pm\rangle$, ve benzerleri için yapılabileceğini bir alıştırma olarak doğrulayabilirsiniz.

Kuantum mekaniğinin üçüncü postülası, fiziksel bir sistemin matematiksel gösteriminin gerçeklikle bağlantı kurduğu yerdir. Deneylerle test edilebilecek/kıyaslanabilecek öngörüler sağlar. Üçüncü postülanın, kuantum mekaniğinin fiziksel çıktısını olasılıklar (özellikle, beklenen değerler) cinsinden verdiğini not edin. Aslında, göreceğimiz gibi, kuantum mekaniğinin *bütün* fiziksel öngörüleri özünde olasılıksaldır.

Üçüncü postüla sadece istatistiksel ortalamalar, yani beklenen değerler, veriyorken spin gibi birşeyin ölçümünün çeşitli sonuçlarına ait olasılıkları doğrudan nasıl görebiliriz? Şöyle ilerleriz. Diyelimki $x = \hbar/2$'de 1 değerini alan ve bunun dışında yok olan bir $f(x)$ fonksiyonu olsun.* Bir gözlenebilir, mesela $f(S_x)$, düşünün ki henüz bir operatör değil ama deneysel erişilebilen bir gözlenebilir olarak görülüyor. Dolayısıyla, $f(S_x)$, x ekseni boyunca spin yukarı için bir dedektör gibidir — x doğrultusunda spin $\frac{\hbar}{2}$ olduğunda bir, değilse sıfır değerini verir. Eğer tekrar tekrar deneysel bir durum kurulduğunu ve $f(S_x)$'in ölçüldüğünü düşünürseniz (çok sayıda deney limitinde) $f(S_x)$'in beklenen değerinin tam olarak S_x'in $\hbar/2$ değerine sahip olma olasılığına eşit olacağını görürsünüz. (alıştırma) Daha genel olarak, S_x'in herhangi R gerçel sayı aralığında olma olasılığı R kümesinin karakteristik fonksiyonunun beklenen değeridir. Açıkça, diğer herhangi bir spin bileşeni için aynısını yapabiliriz. Böylelikle, bir beklenen değer hesaplayarak bir olasılık bulabiliriz ki $f(S_x)$'i nasıl temsil edeceğimizi bulduğumuz taktirde bunu nasıl yapacağımızı biliyoruz. Şimdi, bunu nasıl yapacağımızı görelim.

Genellikle, ON $|i\rangle$ özvektör bazı ve a_i özvektörleri ile bir A Hermityen operatörü ve bir gerçel değerli $h(x)$ fonksiyonu verildiğinde, tayfsal ayrışımını kullanarak bir $h(A)$ kendine eşlenik operatörü tanımlayabiliriz. $h(A)$'nın özvektörlerininin A'nınkilerle aynı olmasını ve özdeğerlerinin $h(a_i)$ olmasını istiyoruz. Açıkça,

$$h(A) = \sum_i h(a_i)|i\rangle\langle i|$$

tayfsal ayrışımını arzu ediyoruz. Kolayca, $|i\rangle$'nin $h(A)$'nın özvektörlerini (bazını) $h(a_i)$ özdeğerleri ile oluşturacağını kontrol edebilirsiniz. Böylelikle gözzlemlenebilirlerin fonksiyonlarını tayfsal ayrışımları ile tanımlarız. Bilhassa, $x = \hbar/2$ noktası için f karakteristik fonksiyonu verildiğinde $f(S_x)$ *operatör*ünü tayfsal ayrışımı ile *tanımlıyoruz* :

$$f(S_x) = f(\frac{\hbar}{2})|S_x,+\rangle\langle S_x,+| + f(-\frac{\hbar}{2})|S_x,-\rangle\langle S_x,-| = |S_x,+\rangle\langle S_x,+|$$

Şimdi, üçüncü postülaya göre $f(S_x)$'in beklenen değerlerinin hesaplanması ile, aşağıdaki olasılık dağılımlarının ortaya çıktığı kolayca görülebilir. (güzel alıştırma!)

Durum: $|S_z,\pm\rangle \longrightarrow Prob(S_x = \pm\hbar/2) = 1/2, \qquad Prob(S_x = \mp\hbar/2) = 1/2$

Durum: $|S_x,\pm\rangle \longrightarrow Prob(S_x = \pm\hbar/2) = 1, \qquad Prob(S_x = \mp\hbar/2) = 0$

*Böyle bir fonksiyon $x = \hbar/2$ kümesi için *karakteristik fonksiyon* olarak adlandırılır.

Durum: $|S_y, \pm\rangle \longrightarrow Prob(S_x = \pm\hbar/2) = 1/2, \qquad Prob(S_x = \mp\hbar/2) = 1/2$

S'nin diğer bileşenleri ile benzer oyunları kolayca oynayabilirsiniz. İstediğiniz herhangi bir durumdaki olasılıkları da (beklenen değerler yoluyla) durumu $|\pm\rangle$ bazında açarak ve bazın ortonormalliğini kullanarak beklenen değerleri bulup hesaplayabilirsiniz. Hoş bir alıştırma olarak durum vektörünün

$$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

formunu aldığında S_z için $\hbar/2$ elde etme olasılığının $|a|^2$ ile verilirken $-\hbar/2$ elde etmenin olasılığının $|b|^2$ ile verileceğini ispatlayabilmelisiniz. Boylandırma koşulunun

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = |a|^2 + |b|^2$$

olasılıkların toplamını bire garantilediğini not edin.

Bu, S_z için herhangi bir başka değerin elde edilme olasılığının sıfır olması gerektiğine işaret ediyor. Haydi bunu doğrudan ispatlayalım. $g(x)$ $\pm\hbar/2$'de yok olan bir fonksiyon olsun yani spin operatörlerinin herhangi birinin özdeğerlerinde yok olsun. Spinin herhangi bir bileşeni, S_k ve herhangi bir $|\psi\rangle$ durumu için

$$\langle g(S_k)\rangle = \langle\psi| \left\{ g(\frac{\hbar}{2})|S_k,+\rangle\langle S_k,+| + g(-\frac{\hbar}{2})|S_k,-\rangle\langle S_k,-| \right\} |\psi\rangle = 0$$

elde ederiz. Bilhassa, eğer g'yi S_k'nın tayfını içermeyen herhangi bir kümenin karakteristik fonksiyonu olarak seçerseniz beklenen değer – *S_k'nın bu küme içinde bulunma olasılığı* – sıfır olur. Böylece, *bir gözlenebilire ait ölçümün yegane sonucun, onun tayfının bir elemanı yani özdeğerlerinden biri* olacağını görürüz.

Buraya kadarki sonuçlar genelleştirilerek ifade edilecek kadar önemlidir. Kendine eşlenik A operatörü ile temsil edilen bir gözlenebilire ait ölçümün tek olası sonucu A'nın özdeğerlerinden biridir. $|\psi\rangle$ (birim) vektörü ile temsil edilen bir durum ve A (ile temsil edilen) gözlenebiliri verildiğinde

$$|\psi\rangle = \sum_i \langle i|\psi\rangle|i\rangle,$$

yazabiliriz. Burada

$$A|i\rangle = a_i|i\rangle\,.$$

Eğer dejenerelik yoksa, A (ile temsil edilen gözlenebilir) ölçümünden a_i değerinin elde edilme olasılığı $|\langle i|\psi\rangle|^2$'dir. Eğer dejenerelik varsa, a_i elde edilme olasılığı $\sum_j |\langle j, a_i|\psi\rangle|^2$ ile verilir. Burada toplam, a_i'nin alt uzayına bağlı $|j, a_i\rangle$ ON bazı üzerinden yapılır.