Teslim : 18 Kasım 2009

FİZ3101 KUVANTUM FİZİĞİ I
Ödev 2

1. Kütlesi m olan bir parçacık,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -a/2 < x < a/2 \\ \infty & \text{diğer bölgelerde} \end{cases}$$

potansiyeli etkisi altında hareket ediyor. Bu parçacığin zamana bağlı Schrödinger denklemini çözün.

2. Sonsuz kare kuyu potansiyeli etkisindeki bir parçacığın başlangıç dalga fonksiyonu ilk iki durgun durumun bir çift kombinasyonu olarak veriliyor :

$$\Psi(x,0) = A\big[\psi_1(x) + \psi_2(x)\big]$$

(a) $\Psi(x,0)$'ı normalize edin.

(b) $\Psi(x,t)$ ve $|\Psi(x,t)|^2$'yi hesaplayın. İkincisini Euler formülünü kullanarak ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$) trigonometrik formda yazın. ($\omega \equiv \pi^2\hbar/2ma^2$)

(c) $\langle x\rangle$ beklenen değerini hesaplayın. Bunun zaman içinde salınım hareketi yaptığını gösterin. Bu salınımın genliğini bulun. (Genlik a/2'den büyük olamaz!)

(d) $\langle p\rangle$'yi hesaplayın. (Kısa yoldan...)

(e) H'ın beklenen değerini hesaplayarak E_1 ve E_2 ile nasıl ilişkili olduğunu belirleyin.

3. Sonsuz kare kuyu potansiyelindeki bir parçacığın başlangıç dalga fonksiyonu

$$\psi(x,0) = Ax(a-x)$$

olarak verilsin,

(a) $\psi(x,0)$'i normalize edin ve grafiğini çizin. Hangi durağan duruma benziyor? Bu benzeşmeyi kullanarak enerjinin beklenen değereini tahmin edin.

(b) $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ ve $\langle H\rangle$ değerlerini $t = 0$ için hesaplayın. $\langle H\rangle$, (a) şıkkında tahmin ettiğiniz değerle ne kadar benzeşiyor?

4. Alçaltma operatörünün sonsuz genlikli bir kuvantum durumuna sebep olmayacağını gösterin. (Yani ψ Schrödinger denkleminin normalize edilmiş bir çözümü ise $\int |a_-\psi|^2 dx < \infty$ olmalıdır.)

ipucu. Kısmi integrasyon yöntemi ile

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a_-\psi)^*(a_-\psi)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(a_+a_-)\psi dx$$

olduğunu gösterin. Daha sonra integral içindeki a_+a_- yerine Schrödinger denkleminden elde edeceğiniz ifadeyi yazın ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a_-\psi|^2 dx = E - \frac{1}{2}\hbar\omega$$

sonucunu elde edin. (E, ψ durumunun enerjisidir.)

5. Yükseltme ve alçaltma operatörleri Schrödinger denklemine yeni çözümler üretirler. Fakat bu yeni durumlar normalize edilmiş değildir.

(a)

$$a_+\psi_n = c_n\psi_{n+1}$$
$$a_-\psi_n = d_n\psi_{n-1}$$

olduğuna göre c_n ve d_n normalizasyon katsayıları nedir?

ipucu. Kısmi integrasyon ile

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a_+\psi_n|^2 dx = (n+1)\hbar\omega$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |a_-\psi_n|^2 dx = n\hbar\omega$$

olduğunu gösterin. Dolayısıyla cevap olarak

$$a_+\psi_n = i\sqrt{(n+1)\hbar\omega}\psi_{n+1}$$
$$a_-\psi_n = -i\sqrt{n\hbar\omega}\psi_{n-1}$$

(ψ_o gerçel olduğu için ψ_n'ler gerçel olmalıdır.)

(b) Harmonik salınıcının n. kuvantum durumu

$$\psi_n(x) = A_n(a_+)^n e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

için A_n nedir?

cevap :

$$A_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!(\hbar\omega)^n}}$$

6. Basit harmonik salınıcı için,

(a) 1. uyarılmış durum dalga fonksiyonunu türetin. Bunu normalize edin ve bulduğunuz normalizasyon katsayısını bir önceki sorunun (b) şıkkında bulduğunuz sonuç ile kıyaslayın.

(b) ψ_2'yi elde edin.

(c) ψ_o, ψ_1 ve ψ_2'nin birbirine ortogonal olduğunu gösterin.

7. Harmonik salınıcının temel durumu ve 1. uyarılmış durumu için,

(a) $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$ ve $\langle p^2\rangle$ değerlerini hesaplayın. İşlemlerde kolaylık olması için $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ değişkenini ve $\alpha = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$ sabitini kullanabilirsiniz.

(b) Bu durumlar için belirsizlik ilkesini test edin.

(c) $\langle T\rangle$ ve $\langle V\rangle$ değerlerini yeni bir integral almadan hesaplayın. Bunların toplamı E_o ve E_1 ile nasil bağlantılıdır?