KIRILMA

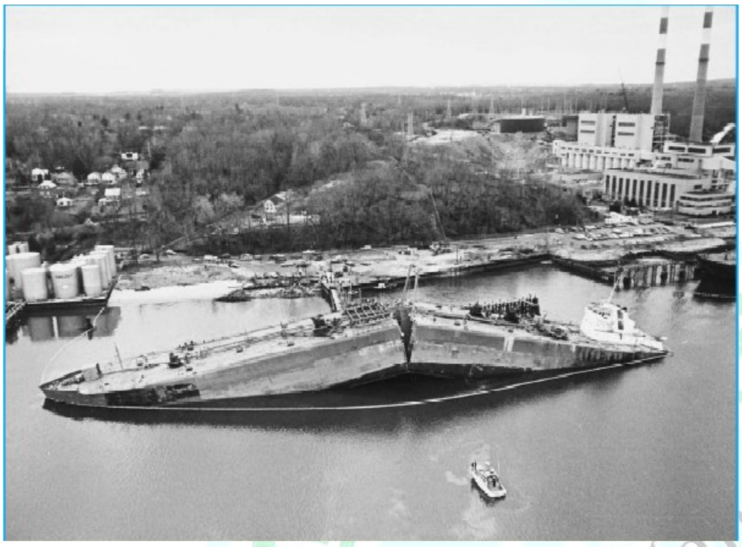
MEKANİĞİNE

GİRİŞ

GİRİŞ

Metalsel malzemelerin kullanılamayacak hale gelmeleri, çatlak oluşumu, bu çatlağın veya çatlakların yayılması ve sonuçta kırılma nedeniyledir. Çatlak oluşumu, yayılması ve kırılma birbirini tamamlayan kavramlardır. 2.Dünya harbine kadar geleneksel tasarım yöntemlerinin amacı metalsel malzemeye etkiyen statik yükü ya akma mukavemetinin altında tutarak aşırı sehimden korumak yada max. çekme mukavemetinin altında tutarak burkulma ve boyun teşekkülünden korumaktı. Bu yöntemlerden malzemenin kırılma direnci akma mukavemetinden büyük, çekme mukavemetinden küçüktür. Halbuki 2.dünya savaşı yıllarında bu yöntemlerle yapılmış pek çok gemi, köprü, basınçlı kap, büyük maddi kayıplar doğuran hasarlar meydana getirmişlerdir. Bu hasarların sebebi ne olabilir?

Yapılan araştırmalarda hasara neden olan gerilmelerin çok düşük değerde olduğu görülmüştür. Hasarlara kaynak hataları, mevcut çatlaklar tasarım nedeni ile çentikler ve bunlara artık gerilmelerin ilavesinin sebep olduğu anlaşılmıştır. Hasarların düşük gerilmelerde meydana gelmesi araştırmacıları çatlağın hangi şartlarda oluştuğu? çatlak uzunluğu ile tatbik olan gerilme arasında ne gibi analitik ifadelerin bulunduğu?, gibi soruların cevabını aramaya yöneltti ve böylece kırılma mekaniği doğmuş oldu.

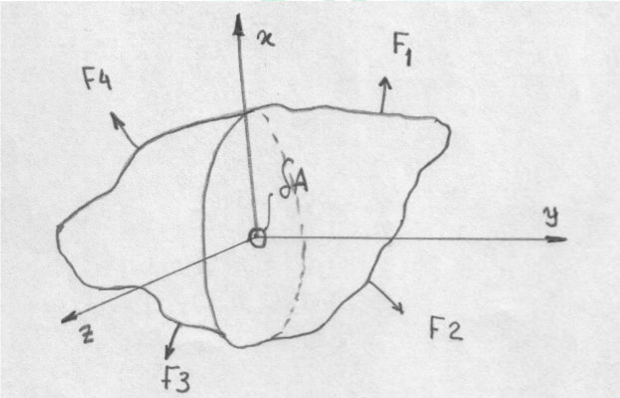


ELASTİSİTE TEORİSİ

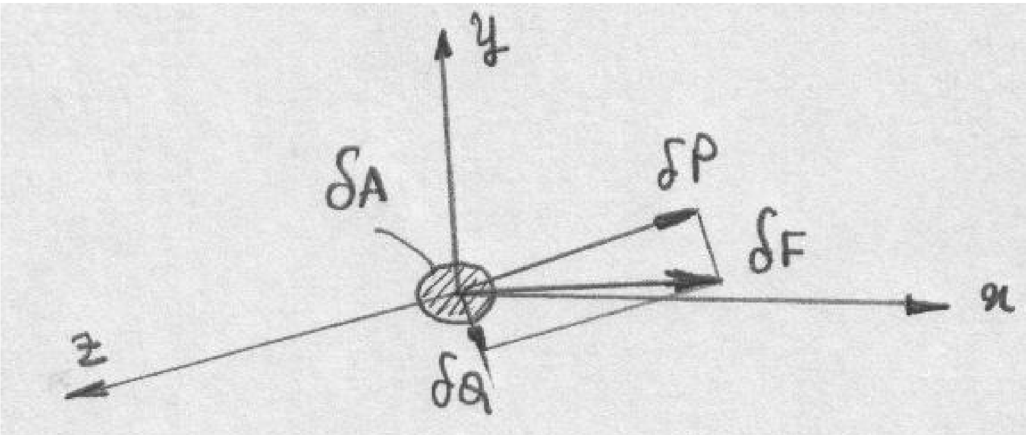
Mühendislikte kullanılan metalsel vb. malzemelerde doğacak hatayı önceden bilebilmek için gerilme ve strain kavramlarını iyi anlamak ve bunlar arasındaki ilişkiyi bilmek gerekir.

GERİLME

Şekil 1'de verilen Fn = (n =1,2,3,...) dış kuvvetlerin etkisi altında dengede olan üç boyutlu bir cismi göstermektedir.



Bir an için cismi C düzleminde kesmiş olalım bu kesit içinde etkiyen kuvvetler dengelerini muhafaza edeceklerdir. Dikkatimizi C kesitindeki küçük δ_A alanı üzerinde yoğunlaştıralım. Toplam kuvvetin bu kesit üzerindeki belli bir bileşkesi δ_F olacaktır.



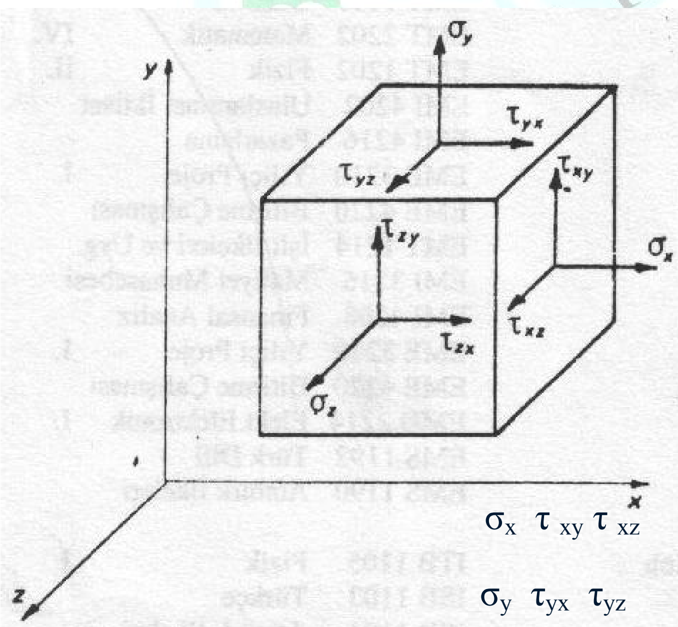
Toplam kuvveti temsil eden δ_F'i 2 bileşene ayrılabilir. Birisi kesme düzlemi dik δ_P ikincisi kesme düzleminde δ_Q bu kuvvetlerin birim alan başına şiddetleri "gerilme" olarak ifade edilir. δ_F 'in 2 bileşeninden kesme düzlemine dik olanına **"direk gerilme"** (normal gerilme);

$$\sigma = \lim_{\delta_A \to 0} \frac{\delta_P}{\delta_A}$$

Kesme düzleminde olanına **“kayma gerilmesi”**

$$\tau = \lim_{\delta_A \to 0} \frac{\delta_Q}{\delta_A}$$

Genelde 3 boyutlu eşit kenarlı dikdörtgen prizması da her bir altı yüzde, hem normal hem de kayma gerilmeleri olacaktır. x,y,z koordinat sisteminde bunları gösterirsek ; dokuz gerime bileşeni sırasıyla;

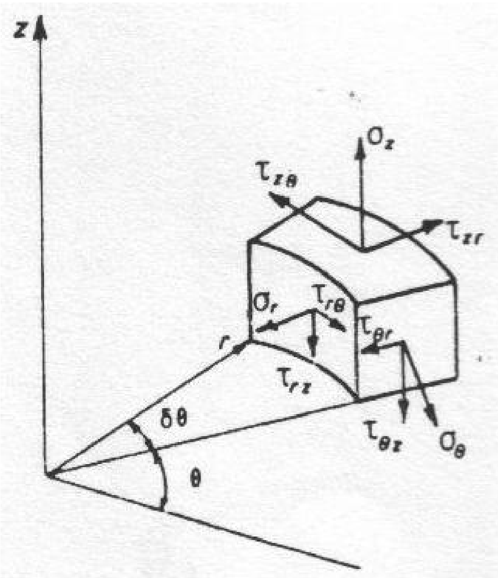


Bu gösteriliş tarzında tek işaretli indisler normal gerilmeleri ve onların yönlerini, 2 işaretlilerden ilk indis düzlemdeki ekseni, ikinci işaret gerilmenin etkili olduğu yönü gösterir. Dengenin sağlanması için kuvvet ve moment sağlanması yani

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

Bazen geometrik veya yüklemede simetrik olan şekillerde silindirik olan polar koordinat sistemi kullanmak avantaj sağlayabilir. O zamanki normal ve kayma gerilmeleri şekilde gösterilmektedir.



$\sigma_r \quad \tau_{r\theta} \quad \tau_{rz}$

$\sigma_\theta \quad \tau_{\theta r} \quad \tau_{\theta z}$

$\sigma_z \quad \tau_{zr} \quad \tau_{z\theta}$

$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}\,, \qquad \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}\,, \qquad \tau_{zr} = \tau_{rz}$

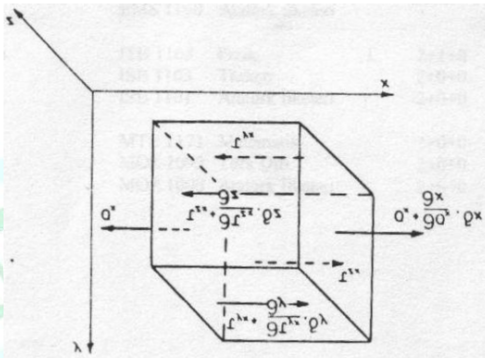
Denge denklemleri ;

Kenar uzunlukları 2x, 2y, 2z olan bir dikdörtgen prizmasına genel bir gerilme sistemi etkiyen x, y, z, yönlerindeki denge;

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial_x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial_y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial_z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial_y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial_x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial_z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial_z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial_x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial_y} = 0$$

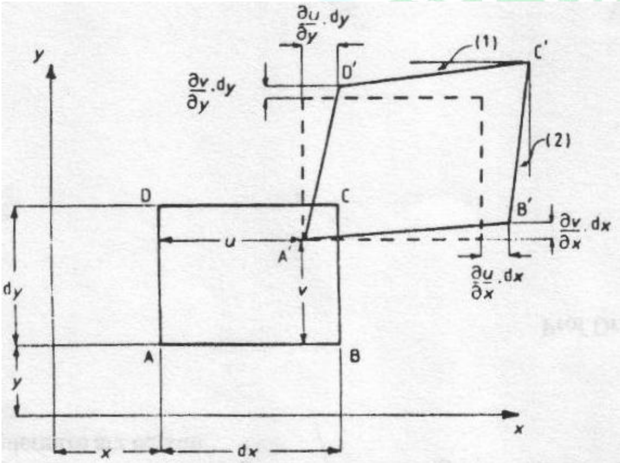


STRAIN

Şekilde görüldüğü gibi küçük bir dikdörtgen ABCD elemanı alalım. Bu eleman strain'e maruz kaldıktan sonra uzunluğunda ve biçiminde değişmeler olsun A′B′C′D′ halinde dönüşsün , gerilmede olduğu gibi strain'de 2 şekilde ifade edilir.

a) Normal strain (uzunluktaki artış nispetinin ölçümü)

b) Kayma strain (eleman köşelerindeki açısal burulma nispeti ölçümü)



Şekilden x yönündeki normal strain ;

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' \text{-} AB}{AB} = \frac{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}.dx\right) \quad dx}{2x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Normal strain'leri 3 yönde yazarsak

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Kayma strain'ini belirlemede izlenecek yol

$$\text{eğim (1)} = \frac{\text{yükseklikteki artış}}{\text{yatay uzunluğu}} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{eğim (2)} = \frac{\text{yükseklikteki artış}}{\text{yatay uzunluğu}} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Bu tanıma "matematiksel kayma straini" denir. Birde "mühendislik kayma straini" vardır. ν_{xy} olarak bilinir.

$$\nu_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$$

aynı yolla diğer kayma sistemlerinin yazılışı:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Dikkatinizi sadece x,y düzlemine çekersek ;normal ve kayma strainleri;

$$\varepsilon_{x} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

yazabiliriz.

FİZİKSEL BAĞ

Elastik bir malzemenin gerilme ve strain'i arasındaki ilişki Hook Kanunu olarak bilinir. Bu bağ 3 boyutlu durumlarda;

$$\varepsilon_{x} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \qquad \varepsilon_{yz} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right).\tau_{yz}$$

$$\varepsilon_{y} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] \qquad \varepsilon_{zx} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right).\tau_{zx}$$

$$\varepsilon_{z} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \qquad \varepsilon_{xy} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right).\tau_{xy}$$

E: Elastik (young) modülü

ν : Poisson oranı

Herhangi bir gerilme halinde sadece max. normal gerilmeler etkili ise hiçbir kayma gerilmesi yoksa bu normal gerilmelere Asal Normal Gerilmeler denir. En genel halde asal normal gerilmeler $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$, olarak gösterilir. $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$ olduğu kabul edilir.

Düzlem Deformasyon:

Yük altındaki bir cismin içindeki herhangi bir noktadaki gerilme ve strain (birim şekil değiştirme miktarı) lerin bulunması problemi önemli basite indirgenebilir. şöyle ki; düzlem deformasyonun 2 hali mevcuttur.

1. Plane stress (ince parçalar için) (düzlem gerilme hali) İnce parçaların kalınlık yönü doğrultusundaki yani z yönünde $\sigma_z = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ ifadeleri yazılabilir. Bu durumda gerilme-strain ifadesi;

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu.\sigma_y\right] \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu.\sigma_x\right] \qquad \varepsilon_{zy} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right).\tau_{xy}$$

olur.

2. Plane strain (kalın cidarlı parçalarda)

(düzlem- şekil değiştirme hali)

Kalın parçaların kalınlık yönü doğrultusunda gerilmenin varolduğu fakat strain değerinin $\varepsilon_z = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$ olduğu kabul edilir. bu durumda gerilme strain ifadesi;

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right) \qquad \varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right) \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(1 + \frac{\nu}{1-\nu} - \tau_{xy}\right)$$

Bu denklemin üsttekilerden farkı, sadece E yerine $\frac{E}{1-\nu^2}$ erine $\frac{\nu}{1-\nu}$ ası olmuştur.

2 - METALLERİN PLASTİK DEFORMASYONU

Metallerin plastik deformasyonunda σ ile ε arasında lineer elastik deformasyonda olduğu gibi doğrusal bir ilişki yoktur. Fakat dizayn konularında malzemede akma olayına meydan vermeden bir cisme uygulanacak max. yük tayini yapılır. Plastik deformasyonda akma olayı söz konusudur. Gerilmeler cinsinden ifade edilebilen genel akma kriteri 2 tanedir.

1 - Von Misses Akma Kriteri

Bu kritere "Distorsiyon enerji Kriteri" denir. Buna göre cisme uygulanan gerilmelerle distorsiyon enerji, belli bir değere ulaşınca akma başlar. Matematiksel olarak

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad \text{hidrostatik gerilme olacak şekilde}$$
$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] = \text{sbt.}$$

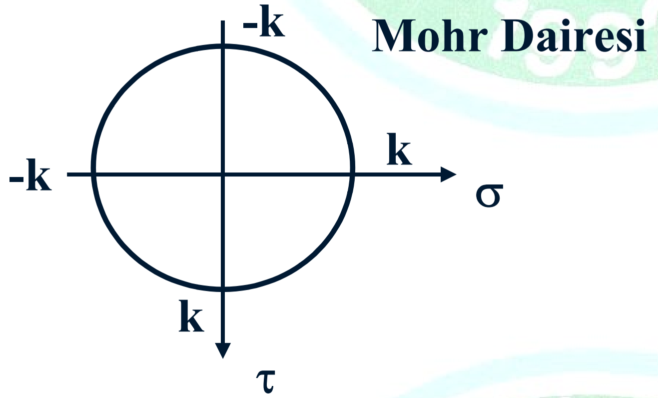
Burada σ_1 , σ_2 , σ_3 asal gerilmeler, k' da bir sabittir. k sabitini tayin etmek için tek eksenli çekme deneyindeki akma gerilmesi ile bağlantısını kurduğumuz da

$\sigma_1 = \sigma_{ak}$, $\sigma_2=\sigma_3= 0$ Denklemde yerlerine konarak

$$[(\sigma_{ak} - 0)^2 + (0-0)^2 + (0-\sigma_{ak})^2] = \text{sbt.}$$

$$2\sigma_{ak}{}^2 = \text{sbt.}$$

Aynı zamanda sadece kayma anındaki akmayı esas alarak mohr dairesi ile bunu gösterecek olursak kayma anındaki akma bir k değerine eşit olunca kayma başlayacağından



$\sigma_2= -k$, $\sigma_1 = k$ $\sigma_3 = 0$ değerleri denklemde yerine yazılırsa

$(k-(-k))^2+ (-k-0)^2+(0-k)^2=\text{sbt.}$

$(+2k)^2+k^2+(-k)^2=\text{sbt.}$

$6k^2=\text{sbt.}$

Buradan Von-Mises kriterini tek eksenli çekme ile sadece kayma halindeki akmayı birbirine eşitlersek ;

$$2\sigma_{ak}^2 = 6k^2$$
$$\sigma_{ak}^2 = 3k^2$$
$$k^2 = \frac{\sigma_{ak}^2}{3} \Rightarrow k = \frac{\sigma_{ak}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1{,}7} = 0{,}577$$

olur.

Bu kriterin özelliği

1. Üç boyutlu tüm gerilmelere bağlıdır .

2. Kriter σ_1 - σ_2 normal gerilme farklarının karelerini göz önünde bulunduruyor.

3. Bu gerilme farklarının kareleri alındığında sonuçlar gerilme işaretlerinden bağımsızdır . Bu son özellik Von Misses Akma kriterinin pratik yönünü oluşturur.

2-TRESCA AKMA KRİTERİ

Buna "max.kayma kriteri" de denir. Bu kriterde akma sisteme uygulanan gerilmeler altında max. kayma gerilmesinin tek eksenli çekme deneyindeki kayma gerilme değerine ulaştığı anda akma başlayacağı kabul edilmiştir.

1. Çekme durumundaki şartlara uygun olarak

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ olduğunu farz edelim. En büyük asal gerilme ile en küçük asal gerilme arasındaki fark $\sigma_1 - \sigma_3$r. Eğer akmayı tek eksenli çekme hali ile oluştuğunu farz edersek $\sigma_1 = \sigma_{ak}\ ve\ [\sigma_2 = \sigma_3 = 0]$ olur. Buradan $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{ak}$ yazabiliriz. Eğer sadece kayma gerilmesi halindeki akmayı esas alacak olursak

$$\sigma_1 = k \qquad \sigma_3 = -k \qquad \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{ak}$$

$$k - (-k) = \sigma_{ak}$$

$$2k = \sigma_{ak}$$

Buradan $k = \dfrac{\sigma_{ak}}{2}$ olur. $\dfrac{1}{2} = 0{,}500$ çıkar

Bu kriterin özellikleri

1. Von Misses kriterine göre matematiksel yönden daha basittir.
2. Bu nedenle mühendislik dizaynlarında daha sık kullanılır.
3. Cebirsel olarak en büyük ve en küçük σ_3 gerilmelerinden istifade edilmektedir.
4. Gerilmelerin işaret ve büyüklükleri önem taşır.
5. Teorik çalışmalarda Von Misses, pratik çalışmalarda Tresca tercih edilir.

Von Misses ve Tresca akma kriterlerinin iyi anlaşılması için bir sonraki slayttaki örneklerin incelenmesi gerekir.

Problem 1 : 508 mm çapında ve 2,5 mm et kalınlığında ince cidarlı bir küre p iç basıncının etkisi altındadır. Akma sınırı 14 kg/mm^2 olan küre malzemesi tam plastik kabul edilmektedir. Akmaya yol açacak p iç basıncını Tresca ve Von-Mises Kriterlerine göre hesaplayın

Çözüm :

İnce cidarlı bir küre için asal gerilmeler $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$ olmak üzere

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pd}{4s}$$

d: çap

s: et kalınlığı

En küçük asal gerilme ise d/2s oranının büyüklüğü nedeniyle ihmal edilebilir. $\sigma_3 \cong 0$.

Bu durumda Tresca Kriterine göre

$$\frac{pd}{4s} - 0 = 14$$
$$p = 0{,}275\,\text{kgf}/\text{mm}^2$$

Von Mises Kriterine göre ise

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2 = 2.14^2$$

$$0 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 = 2.14^2$$

$$2\left(\frac{pd}{4s}\right)^2 = 2.14^2$$

$$p = 0{,}275\,\text{kgf}/\text{mm}^2$$ bulunur.

Problem 2 : Kenar uzunluğu 10 mm olan bir küpe 15 mm eninde bir kanal içinde basma kuvveti uygulanmaktadır. Yükseklik 3 mm olduğu anda basma kuvvetini Tresca ve Von-Misses kriterlerine göre hesaplayınız? (sürtünme ihmal edilecek σ=100+20.ε alınacaktır.)

Çözüm :

Küpün başlangıç hacmi V0=10.10.10 mm^3 yüksekliğin 3 mm olduğu andaki hacmi da (V), o andaki kesit A ile gösterildiğinde V=3.A mm^3 olur. Hacim sabitliğinden V_0=V ve buradan 10.10.10 = 3.A yazılır. A=333,3 mm^2 bulunur. A değeri 15.15=225 mm^2 den büyük olduğu için küpün kanal yan duvarlarına temas edeceği dolayısıyla temasın başladığı andan itibaren şekil değişiminin düzlemsel olduğu anlaşılır. Ayrıca kanal her iki taraftan açık olduğu için gerilme hali düzlemseldir.

Şekil değişimi sonunda yükseklik doğrultusunda gerçek şekil değiştirmenin mutlak değeri :

$|\varepsilon| = \ln\frac{10}{3} = 1{,}204$ ıenin akma sınırı;

σ_{ak}=100+20.1,204 =124,08 MPa değerindedir.

Bu durumda basma kuvveti

Tresca Kriterine göre;

F= σ.A=124,08 . 333,3 = 41356 N bulunur.

Von-Misses Kriterine göre ise

F= (1,15.σ).A =1,15 . 124,08 . 333,3= 47559 N bulunur.