Fonksiyonel Analize Giriş I Ara Sınav Soruları 29 Kasım 2010

---

1 Bir metrik uzayda her kapalı yuvar kapalı bir kümedir. İspatlayınız.

2 (a)

$$d(x,y) = \int_0^1 \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt$$

fonksiyonunun $C_{\mathbb{R}}([0,1])$ üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

(b) d metriğinin bir normdan elde edilemeyeceğini ispatlayınız.

3 Sonlu boyutlu normlu uzayların beş (5) özelliğini yazınız.

4 X n boyutlu bir lineer uzay ve $\{b_1, ..., b_n\}$ bu uzayın bir tabanı olsun.

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in X$$

biçiminde tanımlı $\|\cdot\|_1$ normunu göz önüne alalım. X lineer uzayının bu norma göre bir Banach uzayı olduğunu ispatlayınız.

Her soru 25 puan ve süre 80 dakikadır.

ALİ GÜVEN

Fonksiyonel Analize Giriş I Final Sınavı Soruları 11 Ocak 2011

---

1 Her $x, y \in [0, \infty)$ için
$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$
koşulunu sağlayan, fakat hiç bir sabit noktası bulunmayan bir $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu bulunuz.

2 X sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $A = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise f A üzerinde düzgün süreklidir. İspatlayınız.

3 ℓ_∞ normlu uzayının bir Schauder tabanını bulunuz.

4 İç çarpım uzaylarında Cauchy-Schwarz eşitsizliğini ifade ediniz.

5 X bir iç çarpım uzayı ve $x_0 \in X$ olsun.
$$f_{x_0} : X \to \mathbb{K}, \ f_{x_0}(x) = \langle x, x_0 \rangle$$
fonksiyonunun X üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

6 Her iç çarpım uzayı bir Banach uzayı mıdır? Nedenleriyle açıklayınız.

7 Her Banach uzayı bir Hilbert uzayı mıdır? Nedenleriyle açıklayınız.

8 Bir X iç çarpım uzayında her $A \subset X$ için $A^{\perp\perp} = A$ eşitliği sağlanır mı? Nedenleriyle açıklayınız.

9 Ortonormal taban ne demektir? Tanımlayınız ve bir örnek veriniz.

10 Fourier katsayıları ve Fourier serisi kavramlarının tanımlarını yazınız.

Her soru 10 puan ve süre 60 dakikadır.

ALİ GÜVEN

Fonksiyonel Analize Giriş I Bütünleme Sınavı Soruları 31 Ocak 2011

---

1 X sonlu boyutlu bir normlu uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$$

koşulunu sağlayan, fakat hiç bir sabit noktası bulunmayan bir $f : X \to X$ fonksiyonu bulunabilir mi? Nedenleriyle açıklayınız.

2 Schauder tabanı ne demektir? Tanımlayınız ve bir örnek veriniz.

3 Her normlu uzayın bir Schauder tabanı var mıdır? Nedenleriyle açıklayınız.

4 İç çarpım uzaylarında paralelkenar kuralını ifade ediniz.

5 X bir iç çarpım uzayı, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $x_n \to x$ ise

$$\langle x_n, x_0 \rangle \to \langle x, x_0 \rangle$$

olduğunu gösteriniz.

6 Her iç çarpım uzayı bir normlu uzay mıdır? Nedenleriyle açıklayınız.

7 Banach uzayı olmayan bir Hilbert uzayı bulunuz.

8 X bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in X$ olsun. Eğer $x \perp y$ ise

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

olur. İspatlayınız.

9 H bir Hilbert uzayı ve $A \subset H$ olsun. Hangi durumda $A^{\perp\perp} = A$ eşitliği sağlanır?

10 Ortonormal küme ne demektir? Tanımlayınız ve bir örnek veriniz.

Her soru 10 puan ve süre 60 dakikadır.

ALİ GÜVEN

Fonksiyonel Analize Giriş II Ara Sınavı Soruları [*] 11 Nisan 2011

---

1 X ve Y birer normlu uzay ve $T \in L(X,Y)$ olsun. $T\left(\overline{B}(\theta_X, 1)\right)$ kümesi Y uzayında sınırlı ise

$$\|T(x)\| \leq k\|x\|, \quad \forall x \in X$$

olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı vardır. İspatlayınız.

2 İki normlu uzay arasında tanımlı her lineer dönüşüm sınırlı mıdır? Nedenleriyle açıklayınız.

3 Hangi durumda iki normlu uzay arasında tanımlı her lineer dönüşüm sınırlı olur?

4 H sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı ve (e_n) bu uzayın bir ortonormal tabanı olsun.

$$T : H \to \ell_2, T(x) = (\langle x, e_n \rangle)$$

dönüşümünün bir izometrik izomorfizm olduğunu gösteriniz.

5 X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. $\|T\| < 1$ ise

$$\left(I_X + T^2\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T^{2k}$$

olur. İspatlayınız.

6 $A = \{(m,n) : m,n \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ içinde ikinci kategoriden midir? Nedenleriyle açıklayınız.

7 Düzgün sınırlılık teoreminin ifadesini yazınız.

8 X ve Y birer Banach uzayı ve $T \in B(X,Y)$ olsun. $X \times Y$ üzerinde

$$\|(x,y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$$

normunu düşünelim.

$$S : X \to G(T), \; S(x) = (x, T(x))$$

dönüşümünün bir izomorfizm olduğunu gösteriniz.

---

[*] 4. ve 8. sorular 20 puan, diğer sorular 10 puandır. Süre 60 dakikadır. ALİ GÜVEN

Fonksiyonel Analize Giriş II Final Sınavı Soruları * 14 Haziran 2011

---

1 X bir normlu uzay olsun. Her $x \in X$ için

$$\|x\| = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\|f\|} : f \in X' \setminus \{O\} \right\}$$

olduğunu gösteriniz.

2 X bir normlu uzay olsun. X ayrılabilir ise X' uzayı da ayrılabilir olur mu? Nedenleriyle açıklayınız.

3 Yansımalı her normlu uzay bir Banach uzayı mıdır? Nedenleriyle açıklayınız.

4 Her Banach uzayı yansımalı mıdır? nedenleriyle açıklayınız.

5 $T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, x = (x_1, x_2) \to T(x) = (x_2, x_1)$ dönüşümü bir Hermite dönüşümü müdür? Nedenleriyle açıklayınız.

6 H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. T tersinir ise T^* dönüşümü de tersinirdir ve $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ olur. İspatlayınız.

7 Birimsel dönüşüm ne demektir? Tanımlayınız ve bir örnek veriniz.

8 H kompleks bir Hilbert uzayı, $T \in B(H)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. $\lambda \in \sigma(T)$ ise $|\lambda| \leq \|T\|$ olur. İspatlayınız.

---

*5. ve 8. sorular 20'şer puan, diğer sorular 10'ar puandır. Süre 60 dakikadır.

ALİ GÜVEN

Fonksiyonel Analize Giriş II Bütünleme Sınavı Soruları * 27 Haziran 2011

---

1 X bir normlu uzay olsun. X ayrılabilir ise X' uzayı da ayrılabilir olur mu? Nedenleriyle açıklayınız.

2 Her Banach uzayı yansımalı mıdır? nedenleriyle açıklayınız.

3 Yansımalı her normlu uzay bir Banach uzayı mıdır? Nedenleriyle açıklayınız.

4 H kompleks bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. $T = R + iS$ olacak şekilde R ve S Hermite dönüşümleri vardır. İspatlayınız.

5 $T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, x = (x_1, x_2) \to T(x) = (x_2, x_1)$ dönüşümü bir birimsel dönüşüm müdür? Nedenleriyle açıklayınız.

*Her soru 20 puan ve süre 60 dakikadır.

ALİ GÜVEN