

Adı ve Soyadı:

Numarası :

Metrik Uzaylar Arasınav Soruları

29. 11. 2006

1. (a) Metrik nedir? Tanımlayınız.

(b) X boş olmayan bir küme olsun. Eğer bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$(i) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad (ii) \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

koşullarını sağlıyorsa bunun X üzerinde bir metrik olacağını gösteriniz.

2. Aşağıdaki kavramların tanımlarını yazınız.

(a) sınırlı küme, (b) iki metriğin denkliği, (c) ayrılabilir metrik uzay,

(d) dizisel sürekli fonksiyon, (e) tam metrik uzay.

3. Bir (X, d) metrik uzayında

(a) Sonlu sayıda açık kümenin arakesitinin açık bir küme olduğunu,

(b) Sonlu sayıda kapalı kümenin birleşiminin kapalı bir küme olduğunu

ispatlayınız.

4. (X_i, d_i) ($i = 1, 2, \dots$) birer metrik uzay olsunlar. $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ kümesini göz önüne alalım.

(a) $x = (x_i), y = (y_i) \in X$ için

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

(b) (X, d) metrik uzayının sınırlı olduğunu gösteriniz.

5. (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer (Y, ρ) uzayında açık olan her G kümesi için $f^{-1}(G)$ kümesi (X, d) uzayında açık ise f fonksiyonunun X üzerinde sürekli olacağını gösteriniz.

ALİ GÜVEN

Adı ve Soyadı:

Numarası :

Metrik Uzaylar Final Sınavı Soruları

09.01.2007

1. Aşağıdaki kavramların tanımlarını yazınız.

- (a) Tam metrik uzay, (b) Ayrılabilir metrik uzay, (c) Metrik lineer uzay,
(d) Bir metrik uzayın tamlaması, (e) Daraltma dönüşümü.

2. Aşağıdaki ifadelerin doğru olup olmadıklarını, nedenlerini açıklayarak yazınız.

(a) d_1 ve d_2 bir X kümesi üzerinde denk iki metrik olsun. (X, d_1) metrik uzayı tam ise (X, d_2) metrik uzayı da tamdır.

(b) (c_0, d_∞) metrik uzayı tamdır.

(c) $([0, 1], d_{|\cdot|})$ metrik uzayı ayrılabilirdir.

(d) (X, d) tam bir metrik uzay ve $T^2 : X \rightarrow X$ bir daraltma dönüşümü ise $T : X \rightarrow X$ bir daraltma dönüşümüdür.

(e) (X, d) ve (Y, ρ) birer metrik uzay ve $T : X \rightarrow Y$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$\rho(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa bu dönüşümün bir sabit noktası vardır.

3. $A = \{x \in [0, 1] : x \text{ rasyonel}\}$ kümesi veriliyor.

(a) $(A, d_{|\cdot|})$ metrik uzayının tam olmadığını gösteriniz.

(b) $(A, d_{|\cdot|})$ metrik uzayının tamlamasını bulunuz.

4. (a) Banach sabit nokta teoreminin ifadesini yazınız.

(b) $a > 0$ olmak üzere,

$$f(x) = \int_0^x f(t) x e^{-xt} dt, \quad x \in [0, a]$$

eşitliğini sağlayan bir tek $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır. İspatlayınız.

ALİ GÜVEN

Adı ve Soyadı:

Numarası :

Metrik Uzaylar Bütünleme Sınavı Soruları

30.01.2007

1. (a) " (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ sürekli bir fonksiyon ve $A \subset X$ açık bir küme ise $f(A)$ kümesi de açıktır" ifadesinin doğru olup olmadığını, nedenlerini açıklayarak yazınız.

(b) " $A = \{x \in [0, 1] : x \text{ irrasyonel}\}$ olsun. $(A, d_{|\cdot|})$ metrik uzayı tamdır" ifadesinin doğru olup olmadığını, nedenlerini açıklayarak yazınız.

2. (a) $(C[a, b], d_\infty)$ metrik uzayını tanımlayınız.

(b) $(C[a, b], d_\infty)$ metrik uzayının tam olduğunu gösteriniz.

3. (a) (ℓ_∞, d_∞) metrik uzayını tanımlayınız.

(b) (ℓ_∞, d_∞) metrik uzayının tam olduğunu gösteriniz.

Not: 2. ve 3. sorulardan sadece **bir** tanesi çözülecektir. Çözmediğiniz soruyu daire içine alınız.

ALİ GÜVEN